第五章 波动wave

波的分类：按波的性质分类为

1. 机械波（mechanical wave）：如声波、次声波、超声波…

2. 电磁波（electromagnetic wave）：如可见光、无线电波、红外线…

3. 物质波、引力波等

返回

前页

后页

第一节　机械波 Mechanical wave

定义:

机械振动在弹性介质中的传播.

一、机械波的产生

1. 机械波的产生条件：（1）波源;

（2）弹性介质。

返回
前页
后页

结论：

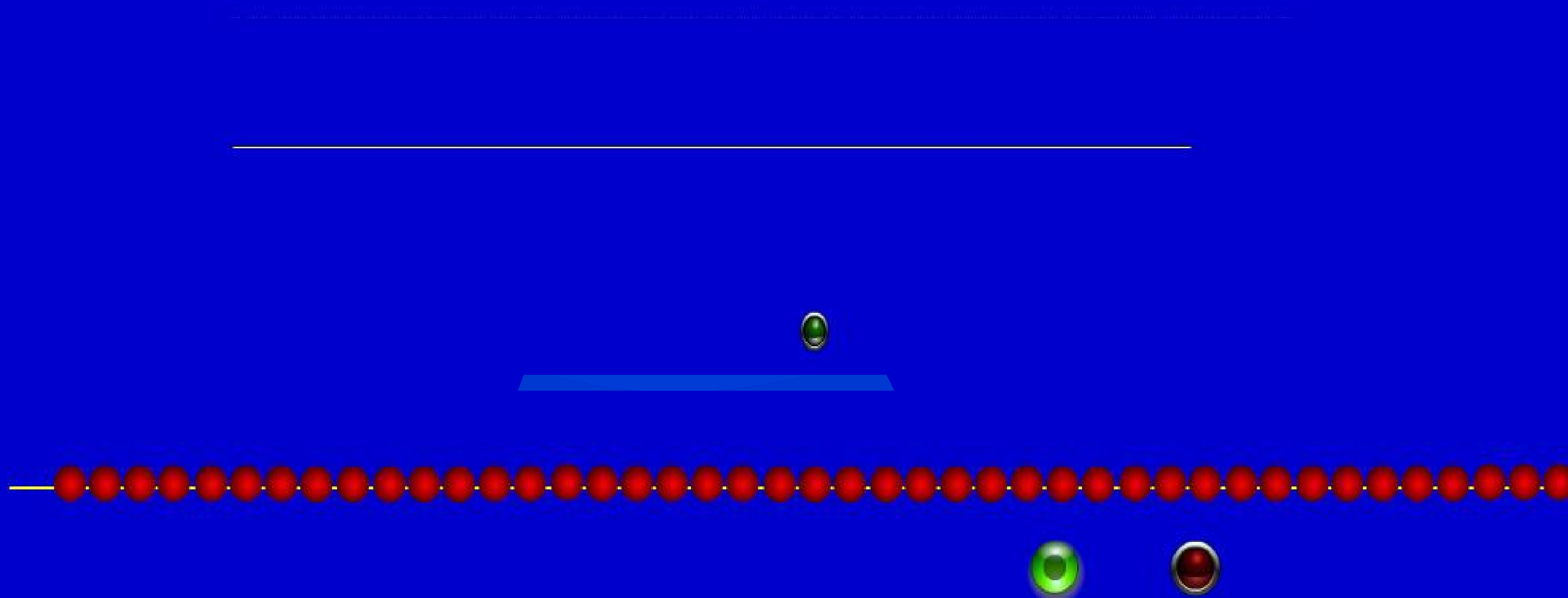
（1）每个质点都在重复着波源的振动，他们的振动频率都与波源相同

（2）后面的质点在开始振动的时间上总是比前面质点晚一段时间，即相位上总是落后的

2. 按波的传播方式分为:

(1) <u>横波（transverse wave）</u>

(2) <u>纵波（**longitudinal wave**）</u>



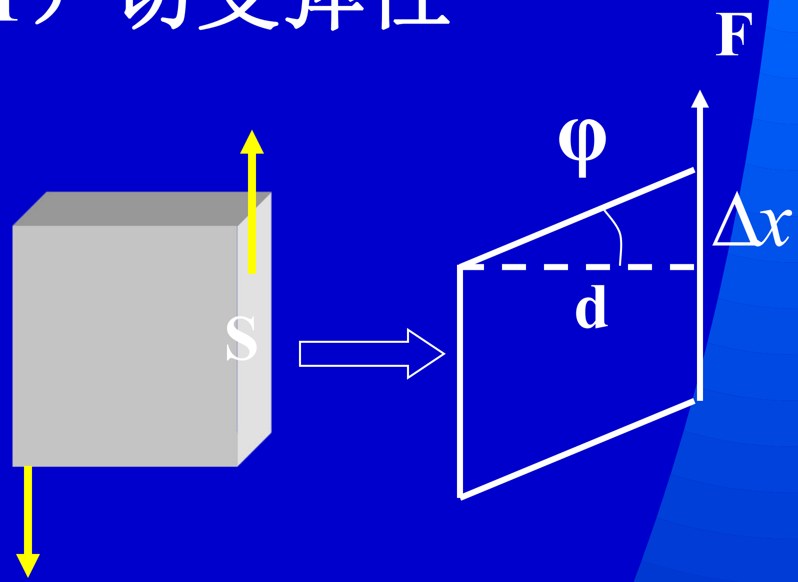
<u>横波和纵波</u>对介质弹性的要求:

<u>横波</u>:介质具有切变弹性——固体

<u>纵波</u>:体变弹性—气体、液体、固体

介质的弹性 （知识扩展）

（1）切变弹性



切应力： $\sigma = F / S$

切应变：

$$\varepsilon = \Delta x / d = tg\phi$$

胡克定律： $\sigma = G\varepsilon$

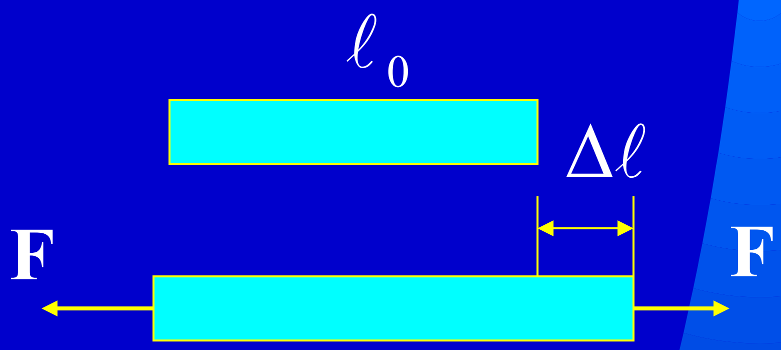
切变弹性模量： $G = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}$

$G_{骨} \sim 10 \times 10^{9}\, N / m^{2}$ $G_{钢} \sim 158 \times 10^{9}\, N / m^{2}$

固体：有切变弹性，能传播横波。

气、液体（生物软组织）：无切变弹性，不能传播横波

（2）张变弹性



张应力：$\sigma = F/S$

张应变：$\varepsilon = \Delta\ell/\ell_0$

虎克定律：$\sigma = Y\varepsilon$

杨氏弹性模量：$Y = \sigma/\varepsilon$

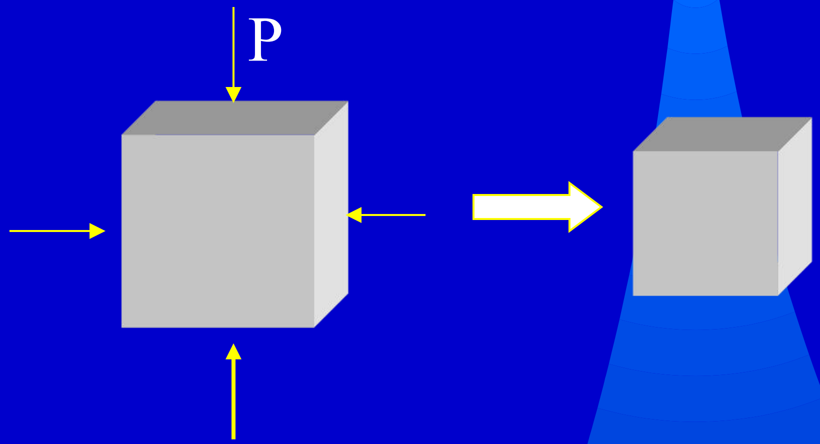
$Y_{钢}$：$200\times10^9 N/m^2$　　$Y_{骨}$：$10\times10^9 N/m^2$

$Y_{血管}$：$0.0002\times10^9 N/m^2$

固体：有张变弹性，能传播纵波。

返回
前页
后页

（3）体变弹性



体应力：压强 P

体应变：$\varepsilon = \dfrac{\Delta V}{V_0}$

虎克定律：$\mathbf{P = K}\,\varepsilon$

体变弹性模量：$K = \dfrac{\Delta P}{\varepsilon}$

$K_{钢} - 80 \times 10^9 N/m^2$ $K_{水} - 10 \times 10^9 N/m^2$

气、液、固体：有体变弹性，均能传播纵波。

二、波面和波线

1.波面（wave surface）：振动位相相同点连成的曲面。

最前面的波阵面称为波前（wave front）

2.波线(wave ray): 描述波传播方向的几何线.

在各向同性的媒质中波线与波面互相垂直。

play

stop

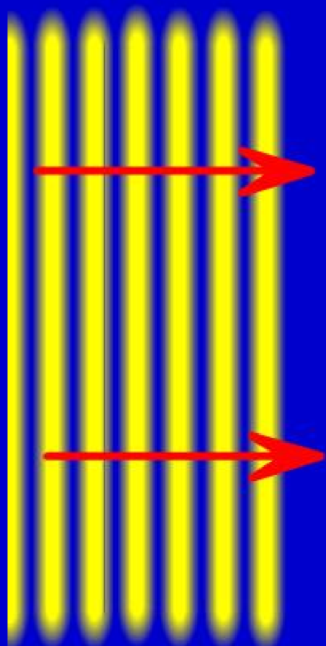
波线

返回

前页

后页

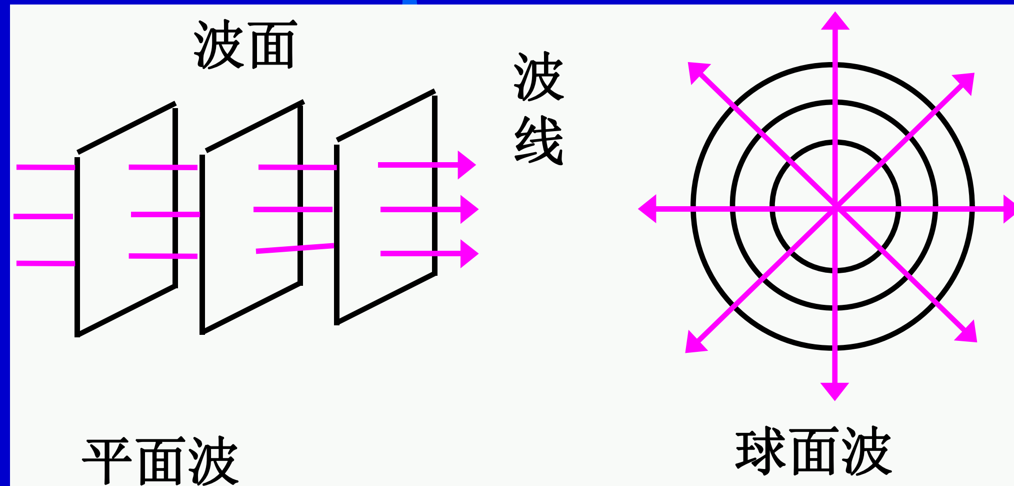
平面波：

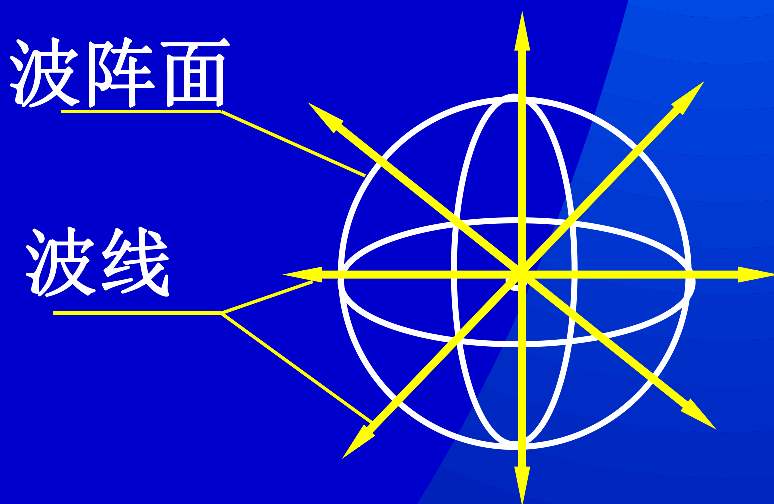


平面波：

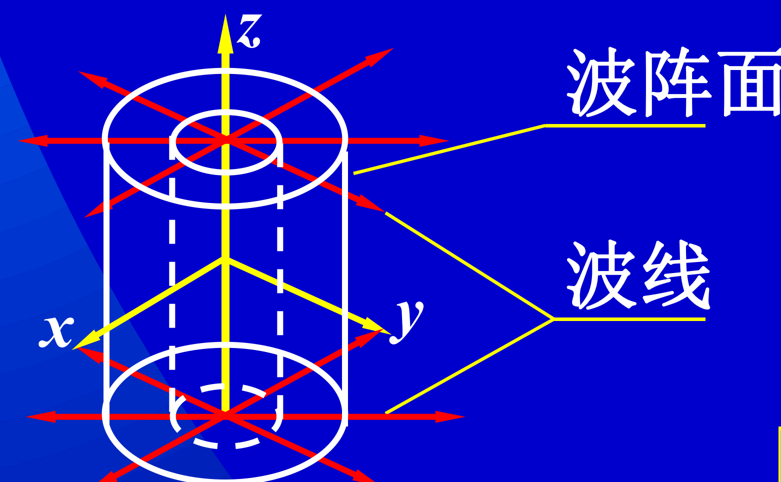
波振面有平面、球面、椭球面等

返回
前页
后页





球面波



柱面波

三、波速、波长和周期 ★★

1、波速（wave speed）：振动在介质中的传播速度，即单位时间内振动传播的距离(注意:不是振动速度)

固体

横波 $u=\sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$ G为切变模量

纵波 $u=\sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$ Y为杨氏模量

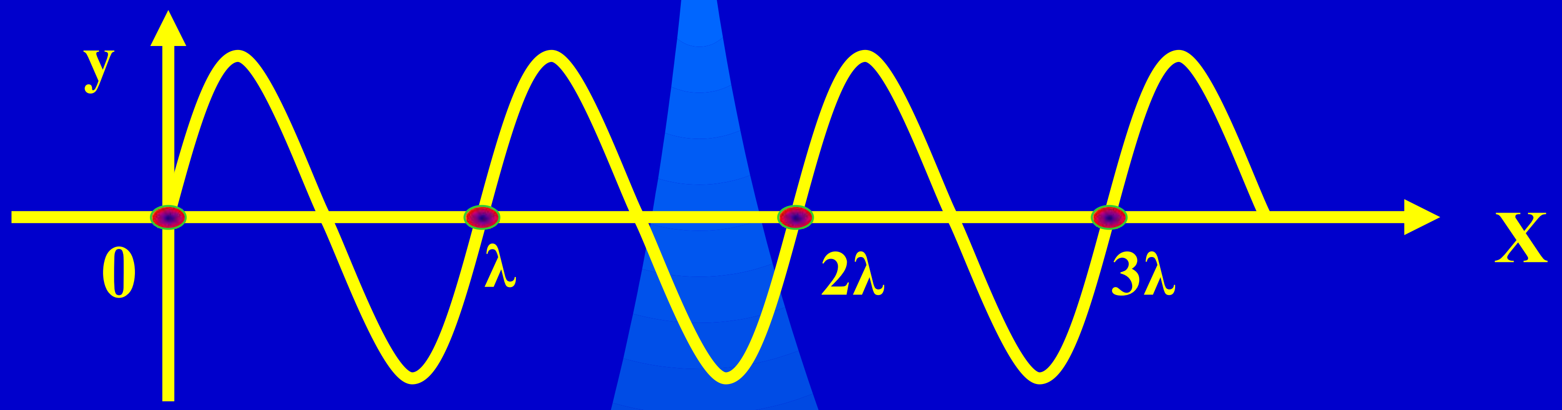
液体、气体

ρ为媒质的密度

纵波 $u=\sqrt{\dfrac{K}{\rho}}$ K为媒质的体变弹性模量

返回 前页 后页

2.波长(wavelength)



波长λ：波线上相差为2π的两点之间的距离.

3.波的周期和频率

周期T：一个完整的波通过某点所需的时间.

频率ν：周期的倒数，同于波源的振动频率.

返回
前页
后页

4、λ、T、ν、u 之间关系：

$$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu$$

由媒质决定

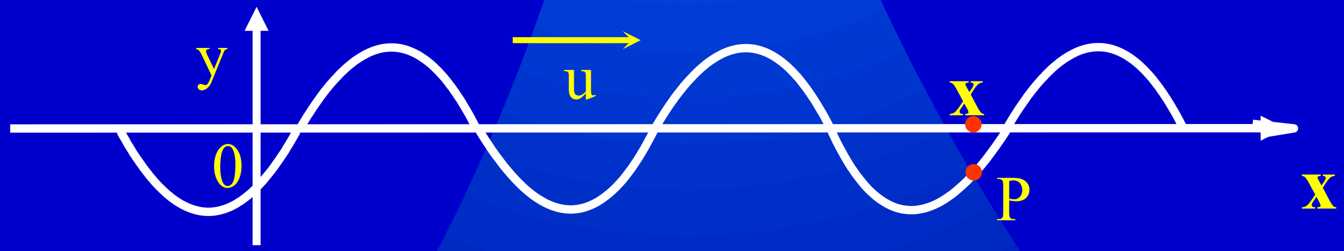
由波源决定

问题：某一机械振动的频率为 f_0，在介质中传播时波的速度为V_0，今将频率变2 f_0，在同一介质传播时，速度为 多少？

答：V_0

第二节　简谐波（simple harmonic wave）

一、简谐波的波函数 ★ ★

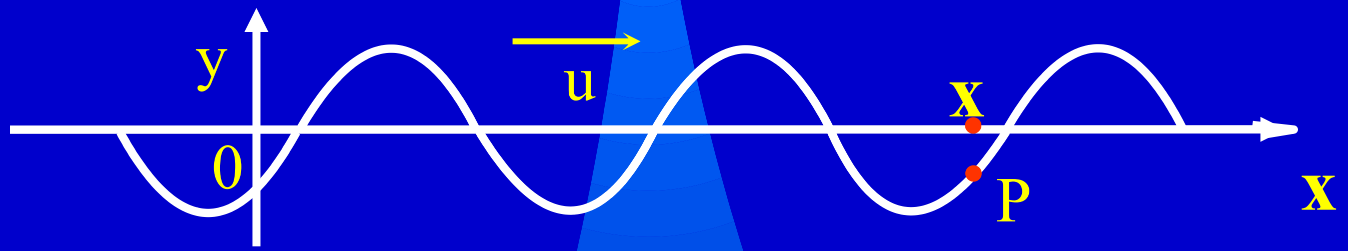


已知0点的振动方程为：

$$y_0 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

问题：任意质点P的振动方程如何表示？

1、P点的振动方程



$$y_0 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

P点比0点的振动在时间上落后了τ： $\tau = x/u$

P点的振动方程为：

$$y = A\cos[\omega(t - \tau) + \varphi]$$

$$= A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

返回 前页 后页

2、简谐波的波函数

由于P点具有任意性, 故沿x轴正方向以波速u传播的平面简谐波的表示式为:

$$\boxed{y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]}$$

波函数

因为ω=2π/T　u =λ/T

波函数又可写为:

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

$$y = A\cos[(\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda})+\varphi]$$

3、波函数所表示的含义

$$y_0 = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

①当x为定值（$x = x_0$）时：波动方程为

$$y = A\cos\left[\omega(t - x_0/u) + \varphi\right]$$

$$y = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x_0 + \varphi\right)$$

$$y = A\cos(\omega t + \varphi'),\quad \varphi' = \varphi - \frac{2\pi}{\lambda}x_0$$

为表示空间 x_0 处质点的振动方程

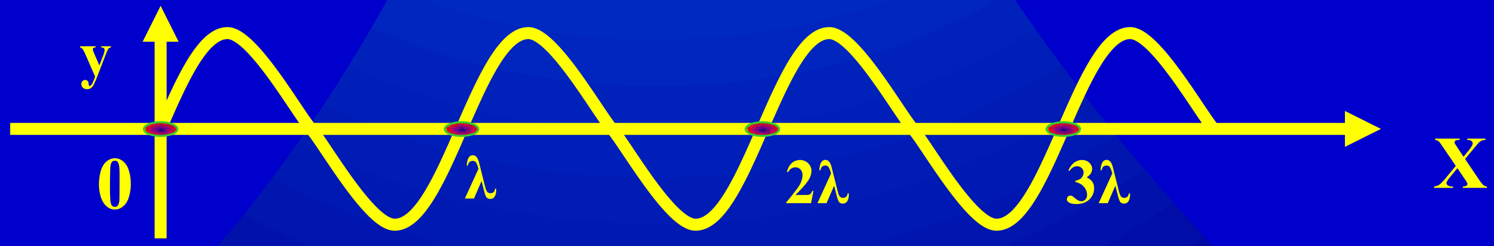
② 当时间为定值（$t=t_0$）时: 波动方程为

$$y=A\cos[\omega(t_o-x/u)+\varphi]$$

$$y=A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x-\omega t_0-\varphi\right)$$ t_0时刻的波形方程

$$y=A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi''\right),\quad \varphi''=-\omega t_0-\varphi$$

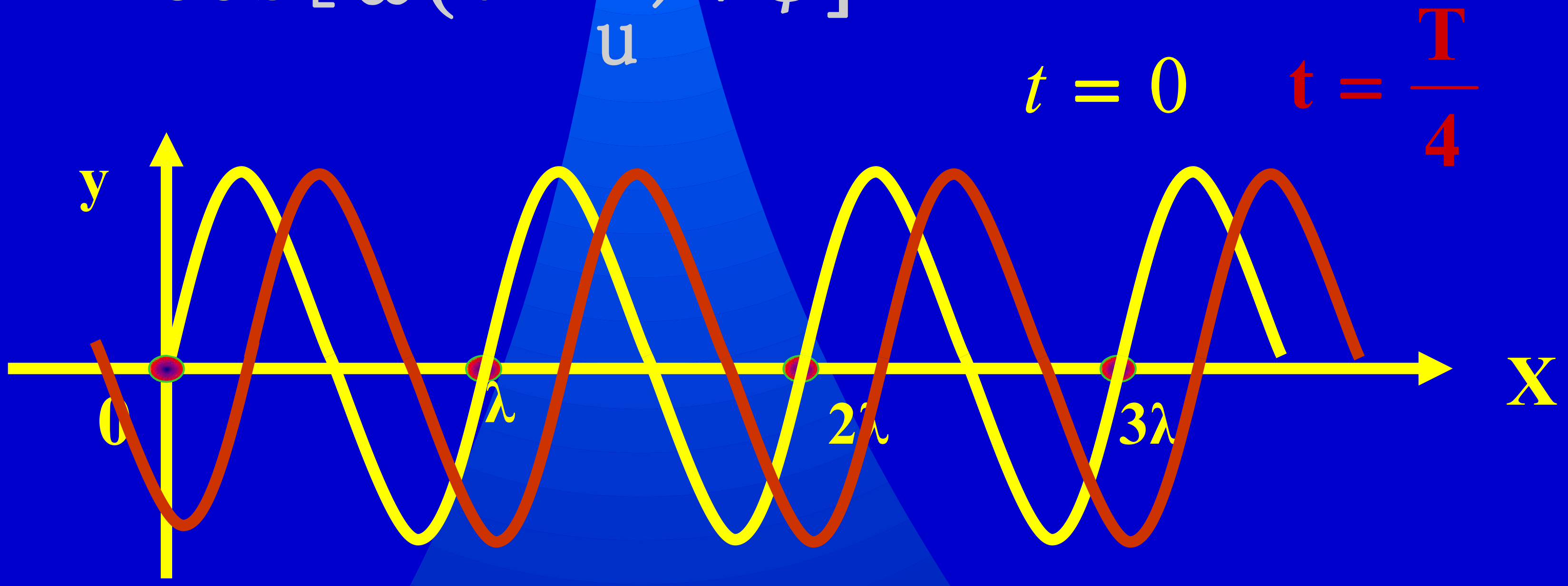
表示空间各质点在t_0时刻的位移,即位移按x的分布规律，也就是给定时刻的波形。



返回
前页
后页

③ 当t和x都在变化时，波动方程

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$



表示沿波的传播方向上各个不同点在不同时刻的位移，反映了波形的传播。

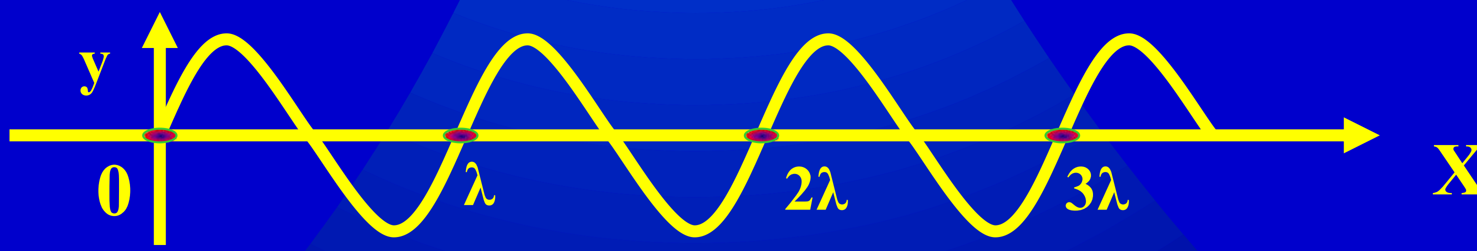
返回
前页
后页

4、位移方程、波函数的区别

$$y=A\cos(\omega t+\varphi)$$

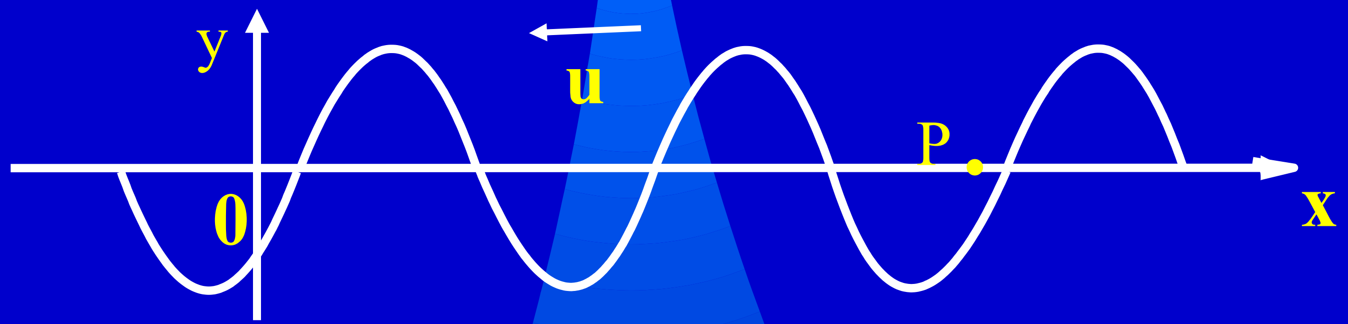
振动曲线

$$y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$



波形曲线

5、沿x轴负方向传播的平面简谐波：



P点的振动超前0点x/u ，t时刻，P处质点的位移就是O处质点在(t+ x/u)时刻的位移。

其波函数应为：

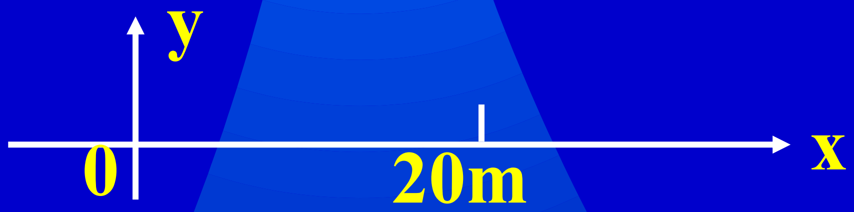
$$y = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

返回
前页
后页

例题5-1

一波源以y_o=0.04 cos 2.5πt（m）的形式作简谐振动，并以100m·s^{-1}的速度在某种介质中传播。试求：①波函数；②在波源起振后1.0s，距波源20m处质点P的位移及速度。

(另: 1. P点与波源的相差; 2. t = 1.0s时刻的波形方程及波形曲线)



解：①已知波的传播速度u= 100 m·s^{-1}

ω= 2.5π　　A= 0.04 m

∴波函数为：$y = 0.04\cos 2.5\pi(t - x/100)$ (m)

返回
前页
后页

②将 $x = 20$m代入上式得到距波源20m处质点的振动方程为：

$y=0.04\cos 2.5\pi(t-0.2)$（m）

在波源起振后1.0s:

该处质点的位移为

$y=0.04\cos 2.5\pi(1.0-0.2)$

$= 0.04\cos 2.0\pi = 4\times 10^{-2}$（m）

质点的振动速度为

$v = dy/dt = -\omega A\sin 2.5\pi(t-0.2)$

$= -2.5\pi\times 0.04\sin 2.0\pi$

$= 0$ (m/s)

返回

前页

后页

例: 已知波函数S=Acos(at-bx)， 则此波的频率ν和波长λ各为:

$$A.\quad \nu = \mathrm{a}, \lambda = \mathrm{b} \qquad B.\quad \nu = \mathrm{a}, \lambda = \frac{b}{a}$$

$$C.\quad \nu = \frac{a}{2\pi}, \lambda = 2\pi\mathrm{b} \qquad D.\quad \nu = \frac{a}{2\pi}, \lambda = \frac{2\pi}{\mathrm{b}}$$

$$S = A\cos[a(t - \frac{b}{a}x) + 0] \longrightarrow \omega = a \qquad u = \frac{a}{b}$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{a} \qquad \lambda = \frac{a}{b}T = \frac{2\pi}{b} \qquad \nu = \frac{1}{T} = \frac{a}{2\pi}$$

返回 前页 后页

例：某波的波函数y=10cos(10πt-x/100) cm，在波线上X等于一个波长处的质点的位移方程为：

$$A.\quad y = 10\sin(10\pi t - 2\pi)cm$$

$$B.\quad y = 10\cos 10\pi t\ cm$$

$$C.\quad y = 20\cos 5\pi t\ cm$$

$$D.\quad y = 10\cos(10\pi t - 2\pi)cm$$

$$y = A\cos[\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi]$$

返回
前页
后页

例:某波源位于坐标原点，其振动方程为$y_0=6\cos(2\pi t+\pi)$ (m)，波以2m/s的速度无衰减地沿x轴正向传播，求：（1）波函数;（2）x=5m处质点P的振动方程;（3）P点与波源的位相差；（4）t＝1.0s时的波形方程。

$$y=6\cos[2\pi(t-\frac{x}{2})+\pi]$$

返回

前页

后页

例: 某平面余弦波波源的振动周期T=0.5秒，所激起的波的波长为λ=10m，振幅A=0.1m。当t=0时波源处振动的位移为零，且向正向运动。取波源处为原点并设波沿x轴正向传播，则其波函数为________________。

波源的振动方程：$y = 0.1\cos(4\pi t - \frac{\pi}{2})$

$$\because u = \frac{\lambda}{T} = 20m/s$$

$$\therefore \quad y = 0.1\cos[4\pi(t - \frac{x}{20}) - \frac{\pi}{2}]$$

返回 前页 后页

第三节 波的能量

一、波的能量与强度 ★★

1.波的能量(energy of wave)

（1）波是能量传递的一种方式

波到达的地方，媒质振动并发生变形，因而使体积元△V内的媒质具有动能和弹性势能。

返回
前页
后页

设媒质密度为ρ，波函数为：

y=Acos [ω (t－x/u)+φ]

空间位置在 x 处质点的振动速度为:

$$v = -A\omega\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

在任意坐标x处的体积元△V，在时刻t 的动能E_K等于其势能E_P，皆为:

$$E_k = E_p = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta VA^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

动能E_K和势能E_P随时间作周期性变化，且大小相同。

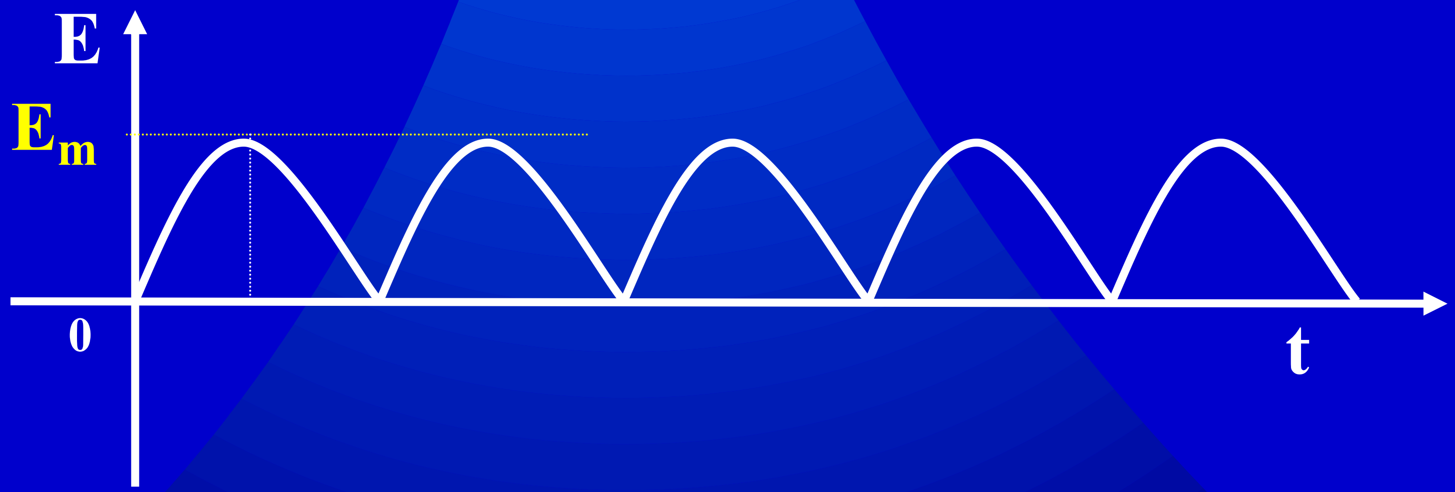
返回 前页 后页

（2）总能量：

$$E = E_k + E_p = \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

$E_{总}$亦随时间变化，其最大值称为**能量幅值**E_m．

$$E_m = \rho \triangle V A^2 \omega^2$$



（3）能量密度

单位体积介质中波的能量，称为波的能量密度，用w表示：

$$w=\frac{E}{\Delta V}=\rho A^{2}\omega^{2}\sin^{2}\left[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi\right]$$

波能量密度也随时间变化。

（4）平均能量密度 $\overline{w}$

一个周期内能量密度的平均值称为平均能量密度。

$$\because\frac{1}{T}\int_{0}^{T}Sin^{2}\left[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi\right]dt=\frac{1}{2}\qquad\overline{w}=\frac{1}{2}\rho A^{2}\omega^{2}$$

2、波的强度 intensity of wave

单位时间通过与波线垂直的单位面积的平均能量，用I表示。

$$\mathrm{I} = \frac{\Delta E}{\Delta t \cdot \Delta S}$$

波强的单位：**W·m^{-2}**

根据I 的定义：

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta S} = \frac{\overline{w} \Delta S u \Delta t}{\Delta t \Delta S} = \overline{w} u$$

简谐波的平均能量密度:

$$\overline{w} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

简谐波的强度:

$$\mathbf{I = \frac{1}{2}\rho u A^2\omega^2}$$

可见：波的强度与振幅A、频率ω的平方成正比。

返回
前页
后页

可听声与超声波声强的比较

$$I = \frac{1}{2}\rho u A^2 \omega^2$$

若频率为1MHz的超声波与1000Hz的可听声波振幅相同，则他们在水中传播时声速之比____，声强之比_____。

超声波的应用：焊接、粉碎、清洗、雾化、治癌……

高强聚焦超声(HIFU):

止血(急性热凝固)、治癌（瞬间升温≥65^{o}C）

返回

前页

后页

例:在同一介质中传播的平面余弦波的频率和振幅的关系为$\nu_1 = 2\nu_2$ ，$A_1 = (1/2) A_2$，则两波强度的关系为:

$A.\quad I_1 = \dfrac{I_2}{2}$ $\qquad B.\quad I_1 = 2I_2$

$C.\quad I_1 = 4I_2$ $\qquad D.\quad I_1 = I_2$

$$\because\ I = \frac{1}{2}\rho u A^2 \omega^2$$

返回
前页
后页

二、波的衰减 attenuation of wave ★

波的衰减: 波在传播过程中，强度随传播距离的增加而减小的现象。

衰减原因有:

1、**吸收衰减:** 由于介质的粘滞性（内摩擦性）或其他原因，波的能量转为其他形式的能量，如热能。

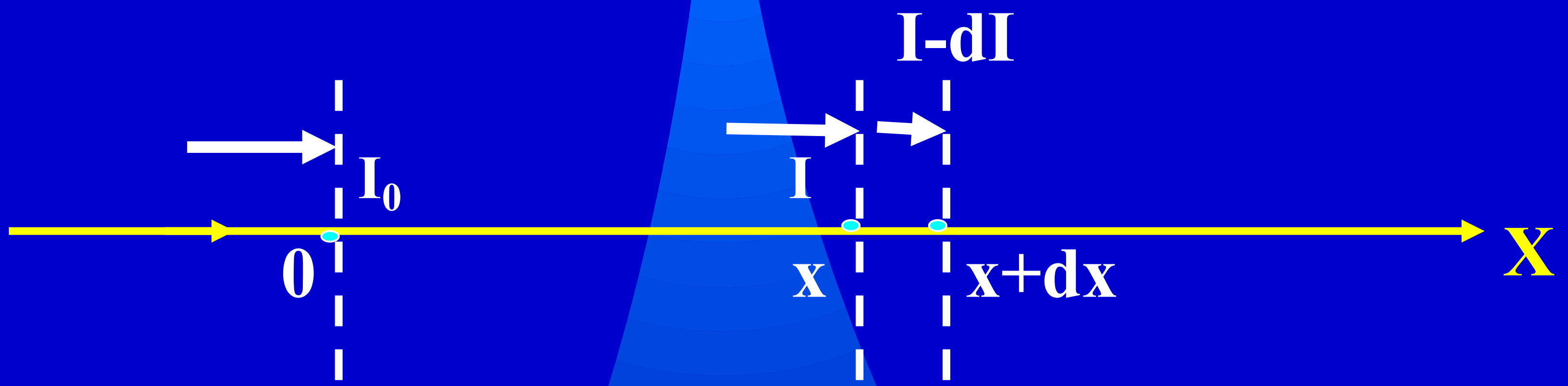
2、**扩散衰减:** 如由于波面的扩大，造成单位截面积波的能量减小。

3、**散射衰减:** 散射粒子的再辐射使传播方向上波的能量减弱的现象。

返回 前页 后页

①平面波的吸收衰减

由于介质的吸收而引起的平面波的衰减



实验表明：－dI与入射波强度I 和该层媒质的厚度dx 呈正比。

即： $-dI = \mu I\,dx$

返回
前页
后页

$$-dI = \mu I\, dx$$

μ称为媒质的**吸收系数**，取决于媒质的性质。

$$\frac{dI}{I} = -\mu dx \qquad \int \frac{dI}{I} = -\int \mu dx$$

$$\ln I = -\mu x + C$$

当 $x = 0, \quad I = I_0$ $\qquad C = \ln I_0$

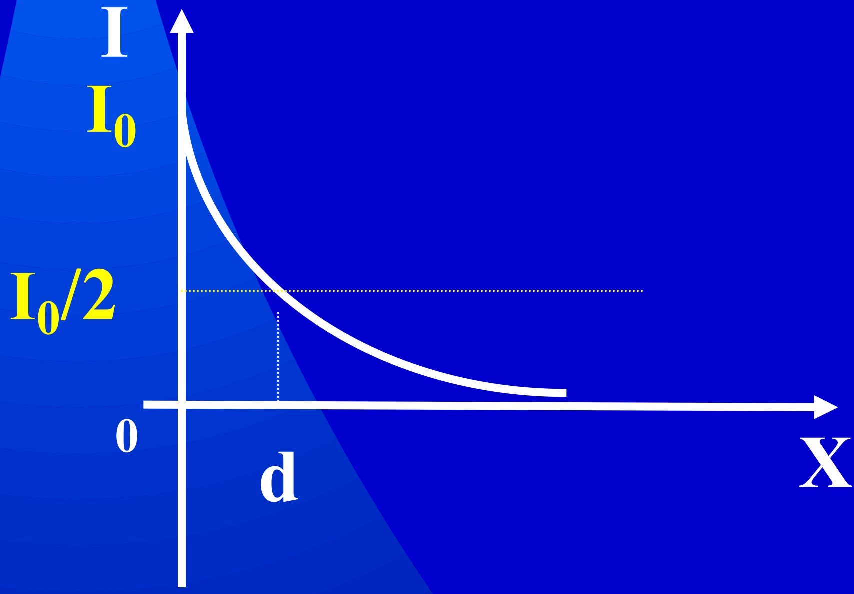
$$I = I_0\, e^{-\mu x}$$

朗伯-比耳定律

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

它表明平面波在传播过程中按指数规律衰减。

例：强度减为一半的传播距离



$$\frac{I_0}{2} = I_0 e^{-\mu d}$$

$$\ln 2 = \mu d \qquad d = \frac{\ln 2}{\mu}$$

半吸收厚度

返回
前页
后页

声波在介质中的吸收衰减

机械振动的能量→消耗在内摩擦上

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

吸收衰减系数： $\mu = \dfrac{8\pi^2\nu^2\eta}{3\rho u^3}$

结论：a. $\mu \propto \nu^2$ 同一介质中，频率高，衰减快。

深部探查用低频超声！

b. $\mu \propto \dfrac{1}{\rho u^3}$ $\rho_{空} \approx \dfrac{1}{1000}\rho_{软}, C_{空} \approx 300 < C_{软} \approx 1500$

$\mu_{空} \gg \mu_{軟}$ 空气对超声强烈吸收，无法穿透

返回
前页
后页

第四节　波的干涉（interference of wave）

一、　惠更斯原理 (Huygens principle) ★

界质中波前上的每一点都可看作新波源（子波源），向各个方向发出子波，在其后的任一时刻，这些子波的包迹（包络面）就是该时刻的新波前。

此原理适用于机械波、电磁波。

作用：

确定新的波阵面及波的传播方向。

利用惠更斯原理求单缝衍射后的波阵面

利用惠更斯原理还可解释反射、折射、双折射等现象。

返回
前页
后页

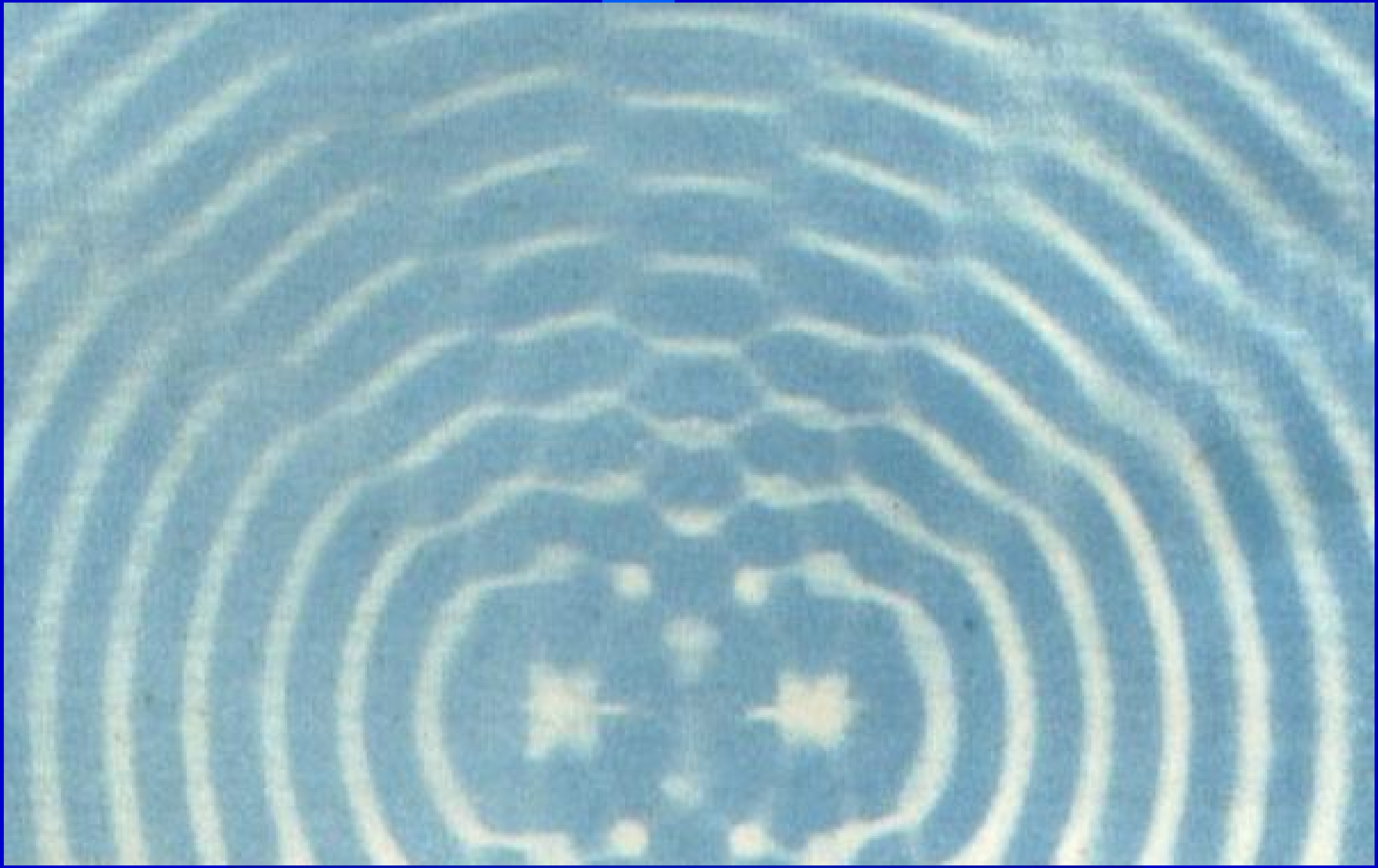
二、波的叠加原理（superposition principle of wave）★

1.几列不同的波在相遇处叠加，分开后仍保持自己原有的传播特性不变。(传播特性:频率、波长、振动方向、传播方向)

2.相遇点的振动为各波引起振动的和振动。

返回
前页
后页

三、波的干涉（interference of wave）★★



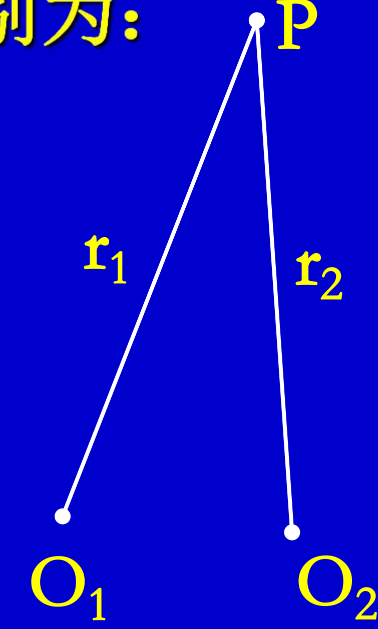
返回
前页
后页

频率相同、振动方向相同、初相相同或相差恒定的波源发出的波叠加时，可使叠加区内某些地方振动始终加强，另一些地方振动始终减弱或完全抵消，形成稳定的干涉图样，这种现象称为波的干涉。

满足此三个条件的波称为相干波（coherent wave)，相应的波源称为相干波源（coherent source）.

返回
前页
后页

设O_1、O_2为两个相干波源，振动方程分别为：



$$y_{O1}=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$

$$y_{O2}=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

O_1产生的波在P点的振动方程：

$$y_1 = A_1\cos[\,\omega(t-\frac{r_1}{u})+\phi_1\,] = A_1\cos[\,\omega t+\phi_1-\frac{2\pi r_1}{\lambda}]$$

O_2产生的波在P点的振动方程：

$$y_2 = A_2\cos[\,\omega(t-\frac{r_2}{u})+\phi_2\,] = A_2\cos[\,\omega t+\phi_2-\frac{2\pi r_2}{\lambda}]$$

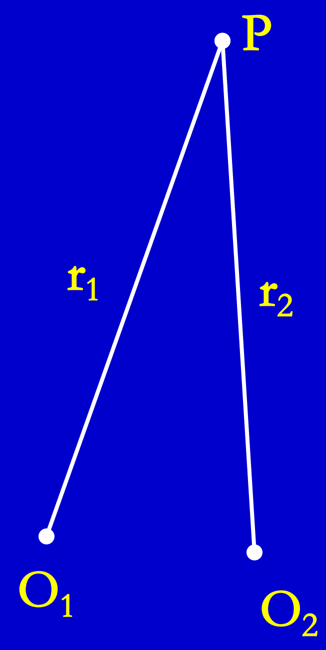
返回
前页
后页

两振动合成后：

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

仍是简谐振动，且：

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$



其中相差：

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}$$

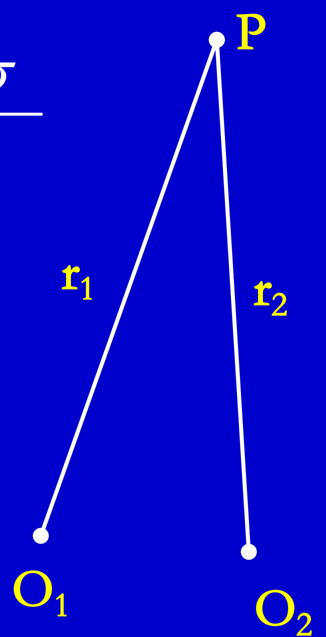
当$\varphi_1 = \varphi_2$时，相差为：

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = -\frac{2\pi\delta}{\lambda}$$

$\delta = r_2 - r_1$ 称为波程差

$$A=\sqrt{A_1^{2}+A_2^{2}+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$\Delta\varphi=-\frac{2\pi\sigma}{\lambda}$$



①$\delta=\pm k\lambda$ 时，$\Delta\varphi=\pm 2k\pi$

$K=0, 1, 2, \cdots$

合振幅最大：$A=A_1+A_2$，干涉加强

② $\delta=\pm(2k+1)\lambda/2$ 时，$\Delta\varphi=\pm(2k+1)\pi$

$K=0, 1, 2, \cdots$

合振幅最小：$A=|A_1-A_2|$，P点干涉减弱。

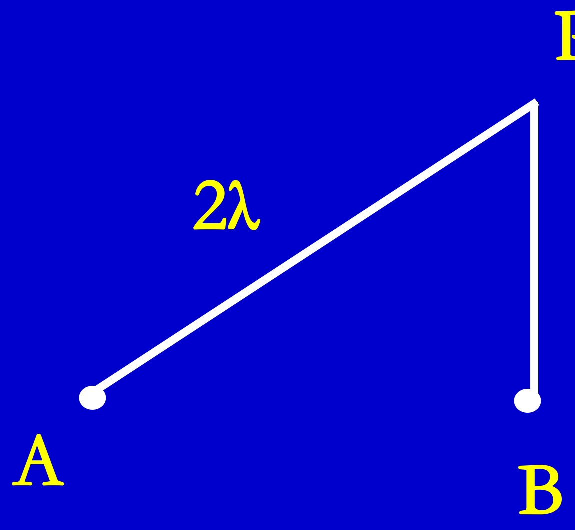
返回
前页
后页

两相干波产生的干涉现象如上图所示，黄线表示合振幅为最大处；白线表示合振幅为最小处。

返回
前页
后页

例: 如图所示,A、B为两相干波源，振幅相同，位相差为π，则P点的合振动振幅为:

0



$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi(r_2-r_1)}{\lambda}$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

返回
前页
后页

例:两相干波的波源振动的相位差为2π时，则在波相遇的某点的振幅:

A. 一定为两波源振幅之和。

B. 一定为两波源振幅之差。

C. 条件不够无法确定。

D. 无衰减传播时则为两波源振幅之和。

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi(r_2-r_1)}{\lambda}$$

例：P和Q是两个同方向、同频率、同相位、同振幅的波源所在处，波源的振幅为A。设它们在介质中产生的波列波长为λ，PQ之间的距离为2.5λ。R是PQ连线上Q点外侧的任意一点。求：（1）PQ两点发出的波到达R点时的相位差；（2）R点处质点振动的振幅。

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi(r_2-r_1)}{\lambda}$$

$$A=\sqrt{A_1^{\,2}+A_2^{\,2}+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$