第 五 章

插值法

Interpolation

- 插值法是数值分析中很古老的分支，有着悠久的历史
- 等距节点内插公式是由我国隋朝数学家刘焯（544-610年）首先提出的
- 不等距节点内插公式是由唐朝数学家张遂（683-727年）提出的，比西欧学者的相应结果早一千多年

内容提要

- 代数多项式插值
- Hermite 插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值
- Matlab中的插值

插值

为什么要插值

- 许多实际问题都可用函数来表示某种内在规律的数量关系
- 但函数表达式无法给出，只有通过实验或观测得到的数据表
- 如何根据这些数据推测或估计其它点的函数值？

例： 已测得在某处海洋不同深度处的水温如下：

深度（M）	466	741	950	1422	1634
水温（^oC）	7.04	4.28	3.40	2.54	2.13

根据这些数据，希望合理地估计出其它深度（如 500、600、800米...）处的水温。

插值基本概念

什么是插值

已知函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，且已经测得在点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

处的函数值为 $y_0 = f(x_0)$，…，$y_n = f(x_n)$

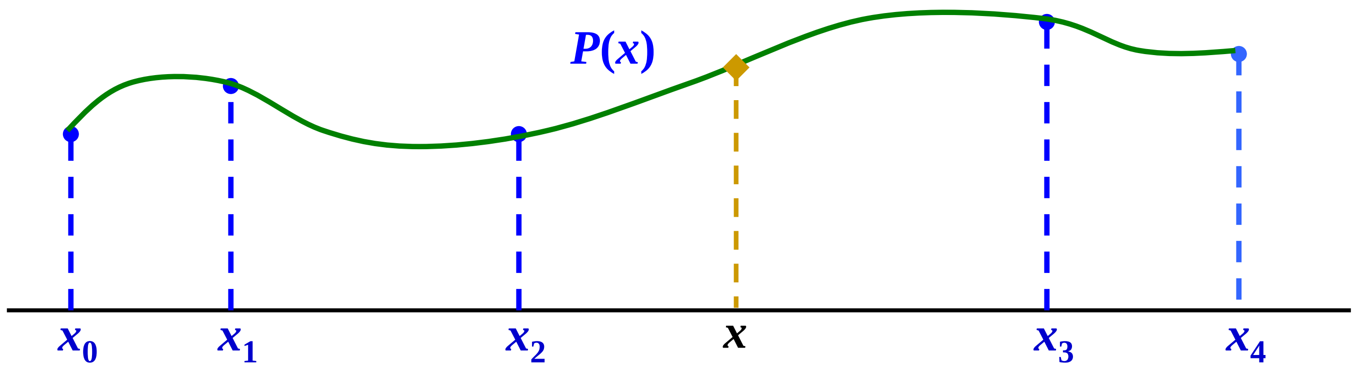
如果存在一个**简单易算**的函数 $p(x)$，使得

$$p(x_i) = f(x_i),\quad i = 0, 1, \ldots, n \qquad (2.1)$$

则称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的**插值函数**

- $[a, b]$ 为插值区间，x_i 为插值节点，$p(x_i) = f(x_i)$ 为插值条件
- 插值节点无需递增排列，但必须确保互不相同！
- 求插值函数 $p(x)$ 的方法就称为**插值法**

常用插值法



- **常用插值法**
  - **多项式插值：** $p(x)$ **为多项式，多项式最常用的插值函数**
  - **分段插值：** $p(x)$ **为分段多项式**

- **三角插值：** $p(x)$ **为三角函数**
- **有理插值：** $p(x)$ **为有理函数**
- **……**

§1 代数多项式插值

一、待定系数法

数多项式插值问题的具体提法就是:

已知函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 $n+1$ 个点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

处的函数值为 $y_0 = f(x_0)$， … ， $y_n = f(x_n)$

求次数 **不超过** n 的多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

使得

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

定理 2.1　在 $n+1$ 个互异节点处满足插值原则且次数不超过 n 的多项式 $P_n(x)$ 是存在并唯一的.

证明

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

这是未知量 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的线性方程组，其系数行列式是范德蒙(Vandermonde)行列式

$$V(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^n \\ & \cdots\cdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j),$$

因为 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 互不相同，故 $V(x_0, x_1, \cdots, x_n) \neq 0$，因此方程组存在唯一的解 $a_0, a_1, \cdots, a_n$，这说明 $P_n(x)$ 存在并唯一。□

唯一性说明：

不论用何种方法来构造，也不论用何种形式来表示插值多项式,只要满足插值条件(2.1)其结果都是相互恒等的。

误差估计

- **估计误差**

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \longrightarrow \boxed{\text{插值余项}}$$

定理： 设 $f(x) \in C^n[a, b]$（n 阶连续可微），且 $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 内存在，则对 $\forall x \in [a,b]$，存在 $\xi_x \in (a, b)$ 使得

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

- 注：余项中的 ξ_x 与 x 是相关的

插值余项证明

由插值条件可知： $R_n(x_i)=0$, $i=0, 1, \ldots, n$

$R_n(x)$ 在$[a,b]$上至少有 $n+1$ 个零点

$R_n(x)$ 可写成 $R_n(x)=K(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

对任意给定的 $x\in[a,b]$ $(x\neq x_i, i=0, 1, \ldots, n)$，构造辅助函数

$$\varphi(t)=R_n(t)-K(x)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$$

则$\varphi(t)$在 $[a, b]$ 中有 $n+2$ 个互不相同的零点：$x, x_0, \ldots, x_n$

罗尔定理 设$f(x)\in C[a,b]$，且在(a,b)内可微；若$f(a)=f(b)=0$，则必存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$。

插值余项

$f(x)\in C^n[a,b]$，且 $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在

由Rolle定理可知 $\varphi'(t)$ 在 (a, b) 内至少有 $n+1$ 个不同的零点；

同理可知 $\varphi''(t)$ 在 (a, b) 内至少有 n 个零点；

以此类推，可知 $\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 (a, b) 内至少有一个零点，设为 ξ_x，

即 $\varphi^{(n+1)}(\xi_x)=0$，$\xi_x\in(a, b)$。

又
$$\begin{aligned}\varphi^{(n+1)}(t)&=R_n^{(n+1)}(t)-K(x)[(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)]^{(n+1)}\\&=f^{(n+1)}(t)-P_n^{(n+1)}(t)-K(x)(n+1)!\\&=f^{(n+1)}(t)-K(x)(n+1)!\end{aligned}$$

$$\Rightarrow K(x)=\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\Rightarrow R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

插值余项

- **几点说明**
  - 余项公式只有当 $f(x)$ 的高阶导数存在时才能使用
  - ξ_x 与 x 有关，通常无法确定，实际使用中通常是估计其上界

如果 $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_{n+1}$，则 $R_n(x) \le \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}\left|x-x_i\right|$

  - 计算点 x 上的近似值时，应尽量选取与 x 相近插值节点

基函数插值法

基函数插值法

记 $Z_n(x) = \{$次数不超过 n 的多项式的全体$\}$ → $n+1$ 维

设 $z_0(x), z_1(x), \ldots, z_n(x)$ 构成 $Z_n(x)$ 的一组基，则插值多项式可表示为

$$p(x) = a_0 z_0(x) + a_1 z_1(x) + \cdots + a_n z_n(x)$$

① 寻找合适的基函数
② 确定插值多项式在这组基下的线性表示系数

通过基函数来构造插值多项式的方法就称为

基函数插值法

二、Lagrange插值法

● Lagrange 基函数

定义：设 $l_k(x)$ 是 n 次多项式，在插值节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 上满足

$$l_k(x_i)=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases}\qquad i=0,1,2,\ldots,n$$

则称 $l_k(x)$ 为节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 上的 n 次**插值基函数**

通过构造法，可求得

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$=\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

Lagrange插值

- **两点说明**
  - $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ 构成 $Z_n(x)$ 的一组基
  - $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ 与插值节点有关，但与 $f(x)$ 无关

Lagrange插值

- **如何用 Lagrange 基函数求 $P(x)$**

设 $p(x) = a_0 l_0(x) + a_1 l_1(x) + \cdots + a_n l_n(x)$

将 $p(x_i) = y_i$， $i = 0, 1, \ldots, n$ 代入，可得

$$\boxed{a_i = y_i \,, \quad i = 0, 1, \ldots, n}$$

$$\Rightarrow p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) \triangleq L_n(x)$$

$L_n(x)$ 就称为 $f(x)$ 的 Lagrange 插值多项式

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0, i \neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}}$$

线性与抛物线插值

- **两种特殊情形**
  - 线性插值多项式（一次插值多项式）：n=1

$$L_1(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

  - 抛物线插值多项式（二次插值多项式）：n=2

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_1)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

注：n 次插值多项式 $L_n(x)$ 通常是 n 次的，但有时也会低于 n 次。如：二次插值中，如果三点共线，则 $L_n(x)$ 为直线

Lagrange基函数性质

- **Lagrange 基函数的两个重要性质**

- 当 $f(x)$ 为一个次数 $\le n$ 的多项式时，有 $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$

  故

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) \equiv 0$$

即 n 次插值多项式对于次数 $\le n$ 的多项式是**精确**的

- 若 $f(x) = x^k$, $k \le n$, 则有

$$R_n(x) = x^k - \sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) = 0$$

特别地，当 $k = 0$ 时有

$$\sum_{j=0}^{n} l_j(x) = 1$$

例 2.1 已给 $\sin 0.32=0.314567, \sin 0.34=0.333487, \sin 0.36=0.352274$，用线性插值及抛物线插值计算 $\sin 0.3367$ 的值，并估计截断误差。

解 令 $x_0=0.32, y_0=0.314567, x_1=0.34, y_1=0.333487, x_2=0.36, y_2=0.352274$。

用线性插值计算，如果取 $x_0=0.32$ 及 $x_1=0.34$，

$$\sin 0.3367 \approx L_1(0.3367)=y_0\frac{0.3367-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{0.3367-x_0}{x_1-x_0}=0.330365$$

$$|R_1(x)|\le\frac{M_2}{2}|(x-x_0)(x-x_1)|,$$ 其中 $M_2=\max\limits_{x_0\le x\le x_1}|f''(x)|$。

因 $f''(x)=-\sin x$，可取 $M_2=\max\limits_{x_0\le x\le x_1}|\sin x|=\sin x_1\le 0.3335$，有

$$|R_1(0.3367)|=|\sin 0.3367-L_1(0.3367)|$$

$$\le\frac{1}{2}\times 0.3335\times 0.0167\times 0.0033\le 0.92\times 10^{-5}$$

用抛物插值计算 $\sin 0.3367$ 时，

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_9)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

有

$$\sin(0.3367)\approx L_2(0.3367)=0.330374.$$

这个结果与 6 位有效数字的正弦函数表完全一样，这说明查表时用二次插值精度已相当高了。其截断误差限

$$|R_2(x)| \le \frac{M_3}{6}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|,$$

其中 $M_3 = \max\limits_{x_0 \le x \le x_2} |f'''(x)| = \cos x_0 < 0.828$，于是

$$|R_2(0.3367)| = |\sin 0.3367 - L_2(0.3367)| \le 0.178 \times 10^{-6}。$$

真实值 $\sin 0.3367 = 0.330374191555628$。

注 2.1 待求点在插值节点之间的方法，我们姑且称为内插，反之称为外推或外插值（extrapolation）。一般来说，内插精度优于外推，高次插值精度优于低次插值，但绝非次数越高越好。后面我们将作进一步说明。上面例题线性插值时，我们也可以选择节点为 x_1 和 x_2，甚至 x_0 和 x_2，请读者自己算一下并和真实值比较，看结果如何，这启发我们改如何选择插值节点呢？

插值举例

例2.2： 已知函数 $y = \ln x$ 的函数值如下

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln x$	−0.9163	−0.6931	−0.5108	−0.3567	−0.2231

试分别用线性插值和抛物线插值计算 $\ln 0.54$ 的近似值（板书）

解： 为了减小截断误差，通常选取插值点 x 邻接的插值节点

线性插值： 取 x_0=0.5, x_1=0.6 得

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = 0.1823x - 1.6046$$

将 x=0.54 代入可得： $\ln 0.54 \approx L_1(0.54) = -0.6202$

插值举例

抛物线插值： 取 x_0=0.4, x_1=0.5, x_2=0.6, 可得

$$\ln 0.54 \approx L_2(0.54) = -0.6153$$

在实际计算中，一般不需要给出插值多项式的具体表达式

$\ln 0.54$ **的精确值为：** $-0.616186\cdots$

可见，抛物线插值的精度比线性插值要高

Lagrange 插值简单方便，只要取定节点就可写出基函数，进而得到插值多项式，易于计算机实现

例2.3 求过点(0, 1)、(1, 2)、(2, 3)的三点插值多项式

解: 由Lagrange 插值公式

$$P(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

$$p(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}\times 1+\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}\times 2+\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}\times 3$$

$$=x+1$$

（给定的三个点在一条直线上）

例2.4 已知 $x_0=100, x_1=121$ 用线性插值估计 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x=115$ 时的截断误差.

解: 由插值余项公式知

$$R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\omega(x)$$

因为 $$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$R_1(x)=-\frac{1}{8}\xi^{-\frac{3}{2}}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$R_1(115)=-\frac{1}{8}\xi^{-\frac{3}{2}}(115-100)(115-121)$$

$$\le\frac{1}{8}\times|(115-100)(115-121)|\times\max_{\xi\in[100,121]}\xi^{-\frac{3}{2}}$$

$$\le\frac{1}{8}\times10^{-3}\times|(115-100)(115-121)|$$

$$=\frac{1}{8}\times15\times6\times10^{-3}=0.01125$$

二、Newton插值多项式

- **为什么 Newton 插值**

Lagrange 插值简单易用，但若要增加一个节点时，全部基函数 $l_k(x)$ 都需重新计算，很不方便！

解决办法 ⟶ **更换基函数**

设计一个可以逐次生成插值多项式的算法，即

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + u_{n+1}(x)$$

其中 $p_{n+1}(x)$ 和 $p_n(x)$ 分别为 $n+1$ 次和 n 次插值多项式

—— **Newton 插值法**

新的基函数

设插值节点为 $x_0, \dots, x_n$，考虑插值基函数组

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = x - x_0$$

$$\varphi_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

- **优点：当增加一个节点 x_{n+1} 时，只需加上基函数**

$$\varphi_{n+1} = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Newton 插值

- 此时 $f(x)$ 的 n 次插值多项式为

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k)$$

需要解决的问题

① 如何从 $p_n(x)$ 得到 $p_{n+1}(x)$?

② 怎样确定参数 $a_0, \ldots, a_n$?

→ **差商 (均差)**

差商

什么是差商

设函数 $f(x)$，节点 $x_0, \ldots, x_n$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$

→ $f(x)$ 关于点 x_i, x_j 的 **一阶差商**

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

→ $f(x)$ 关于点 x_i, x_j, x_k 的 **二阶差商**

差商的一般定义

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

→ **k 阶差商**

差商的性质

- **差商可以表示为函数值的线性组合：** 用归纳法可以证明

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega_{k+1}'(x_j)}$$

差商与节点的排序无关，即差商具有**对称性**

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=f[x_{i_0},x_{i_1},\cdots,x_{i_k}]$$

其中 $i_0, i_1, \dots, i_k$ 是 $0, 1, \dots, k$ 的一个任意排列

- **差商的等价定义：** (其它教材上的所采用的定义)

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\frac{f[x_0,\dots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}$$

差商的性质

- **k 阶差商与 k 阶导数之间的关系：** 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 k 阶导数，则至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使得

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

- **若 $h(x) = c\, f(x)$，则**

$$h[x_0, x_1, \cdots, x_k] = c \times f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$$

- **若 $h(x) = f(x) + g(x)$，则**

$$h[x_0, x_1, \cdots, x_k] = f[x_0, x_1, \cdots, x_k] + g[x_0, x_1, \cdots, x_k]$$

差商表

如何巧妙地计算差商 → **差商表**

差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	…	n 阶差商
x_0	$f(x_0)$					
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$				
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$			
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…	
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	…	$f[x_0, x_1,\dots, x_n]$

差商举例

例： 已知 $y = f(x)$ 的函数值表，试计算其各阶差商

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	5	3	17	21

解： 差商表如下

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
-2	5			
-1	3	-2		
1	17	7	3	
2	21	4	-1	-1

Newton 插值公式

什么是 Newton 插值公式

由差商的定义可得

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x,x_0] \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x,x_0,x_1] \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

$$\cdots\ \cdots$$

$$f[x,x_0,\ldots,x_{n-1}]=f[x_0,\ldots,x_n]+(x-x_n)f[x,x_0,\ldots,x_n] \quad \cdots\cdots \quad (n-1)$$

$$① + (x-x_0)\times ② + \ldots\ \ldots + (x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})\times (n-1)$$

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots+f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})}_{N_n(x)}$$

$$\underbrace{+f[x,x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)}_{R_n(x)}$$

Newton 插值公式

$$f(x) = N_n(x) + R_n(x)$$

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n \prod_{i=1}^{n-1}(x - x_i)$$

其中 $a_0 = f(x_0),\ a_i = f[x_0, \cdots, x_i],\ i = 1,2,\cdots,n$

$N_n(x)$ 是 n 次多项式

$$R_n(x) = f[x, x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

重要性质

$N_n(x_i) = f(x_i),\quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$

$N_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次插值多项式

Newton VS Lagrange

Newton 插值与 Lagrange 插值

$f(x)$ 在 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 上的 n 次插值多项式是唯一的！

$$N_n(x) \equiv L_n(x)$$

且余项相同

$$\Leftrightarrow \quad f[x, x_0, \dots, x_n]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

$$\Rightarrow \quad f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

$$\boxed{f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}}$$

另证：设

$q(x) \triangleq f[x, x_0, \cdots, x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = f(x) - N_n(x)$,

$q(x)$在$x_0, \cdots, x_n$处均为零，所以$q(x)$在$[a,b]$上有$n+1$个零点，根据罗尔定理，$q'(x)$在$q(x)$的两个零点间至少有一个零点，故$q'(x)$在$[a,b]$内至少有n个零点；反复应用罗尔定理，可知$q^{(n)}(x)$在(a,b)内至少有 1 个零点，记为$\xi \in (a,b)$，使

$$q^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - n!\, f[x_0, \cdots, x_n] = 0,$$

所以

$$f[x_0, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

例 2.6 给出$f(x)$的函数表（见表2-2），求4次牛顿插值多项式，并由此计算 $f(0.596)$的近似值.

首先根据给定函数表造出均差表.

表2-2

x_k	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	四阶均差	五阶均差
0.40	0.41075					
0.55	0.57815	1.11600				
0.65	0.69675	1.18600	0.28000			
0.80	0.88811	1.27573	0.35893	0.19733		
0.90	1.02652	1.38410	0.43348	0.21300	0.03134	
1.05	1.25382	1.51533	0.52493	0.22863	0.03126	−0.00012

从均差表看到4阶均差近似常数，5阶均差近似为0.

故取4次插值多项式 $P_4(x)$ 做近似即可.

按牛顿插值公式，将数据代入

$$P_4(x)=0.41075+1.116(x-0.4)+0.28(x-0.4)(x-0.55)$$
$$+0.19733(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)$$
$$+0.03134(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.8),$$

于是

$$f(0.596)\approx P_4(0.596)=0.63192\ ,$$

截断误差

$$|R_4(x)| \approx |f[x_0,\cdots,x_5]\omega_5(0.596)| \le 3.63\times 10^{-9}.$$

这说明截断误差很小，可忽略不计.

此例的截断误差估计中，5 阶均差 $f[x,x_0,\cdots,x_4]$ 用 $f[x_0,\cdots,x_5]=-0.00012$ 近似。另一种方法是取 $x=0.596$，由 $f(0.596)\approx 0.63192$，可求得 $f[x,x_0,\cdots,x_4]$ 的近似值，从而可得 $|R_4(x)|$ 的近似，我们举此例的目的就是想说明牛顿插值余项的应用，

在多数情况下，这两种方法都是可行的，请读者自己计算这两种方法所得误差。

三、Matlab函数

当数据点的个数等于 $n+1$ 时，Matlab 的内置函数 *polyfit(x,y,n)* 对应于插值，这里 x 和 y 分别表示自变量和因变量，n 为多项式次数。

以上例说明其应用。

```
>> x=[0.4 0.55 0.65 0.8 0.9]; y=[0.41075 0.57815 0.69675 0.88811 1.02652];
>> p=polyfit(x,y,4)
p =
     0.0312     0.1224     0.0304     0.9899     0.0013
>> d=polyval(p,0.596)
d =
     0.6319
```

§2 Hermite 插值

为什么 Hermite 插值

在许多实际应用中，不仅要求**函数值**相等，而且要求若干阶**导数**也相等，如机翼设计等

$$p(x) \approx f(x)$$

$$p(x_i) = f(x_i) \quad （i = 0, 1, \ldots, n）$$

$$p'(x_i) = f'(x_i)$$

$$p^{(2)}(x_i) = f^{(2)}(x_i)$$

$$\vdots$$

$$p^{(m)}(x_i) = f^{(m)}(x_i)$$

满足**函数值**相等且**导数**也相等的插值方法称为 **Hermite插值**

重节点差商

- **差商的一个性质**

定理： 设 $f(x)\in C^n[a, b]$，$x_0, \ldots, x_n$ 为 $[a, b]$ 上的互异节点，则 $f[x_0, \ldots, x_n]$ 是其变量的连续函数

重节点差商

$$f[x_0,x_0]=\lim_{x_1\to x_0} f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f'(x_0)$$

$$f[x_0,x_0,x_0]=\lim_{\substack{x_1\to x_0\\ x_2\to x_0}} f[x_0,x_1,x_2]=\frac{1}{2!}f''(x_0)$$

一般地，n 阶重节点差商定义为

$$f[x_0,\ldots,x_0]=\lim_{x_i\to x_0} f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

Taylor插值

什么是 Taylor 插值

在 Newton 插值公式中，令 $x_i \to x_0$，$i=1,\dots,n$，则

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,x_1,\dots,x_n]\prod_{i=1}^{n-1}(x-x_i)$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

余项 $$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

- **Taylor 插值就是在一个节点 x_0 上的 n 次 Hermite 插值**

Hermite 插值

一般来说，给定 $m+1$ 个插值条件，就可以构造出一个 m 次 Hermite 插值多项式

两个典型的 Hermite 插值

- **三点三次 Hermite 插值**

  插值节点：x_0，x_1，x_2

  插值条件：$p(x_i) = f(x_i)$，$i = 0, 1, 2$，$p'(x_1) = f'(x_1)$

- **两点三次 Hermite 插值**

  插值节点：x_0，x_1

  插值条件：$p(x_i) = f(x_i)$，$p'(x_i) = f'(x_i)$，$i = 0, 1$

三点三次Hermite 插值

三点三次 Hermite 插值

插值节点：x_0， x_1， x_2

插值条件：$p(x_i) = f(x_i)$，$i = 0, 1, 2$，$p'(x_1) = f'(x_1)$

可设
$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + A(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

将 $p'(x_1) = f'(x_1)$ 代入可得

$$A = \frac{f'(x_1) - f[x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_2](x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

三点三次Hermite 插值

- **余项公式**

由于 x_0, x_1, x_2 是 $R(x)$ 的零点，且 x_1 是二重零点，故可设

$$R(x) \triangleq f(x) - p(x) = K(x)(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$

与 Lagrange 插值余项公式的推导过程类似，可得

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$

其中 ξ_x 位于 由 x_0, x_1, x_2 和 x 所界定的区间 内

插值举例

例： 函数 $f(x) = x^{3/2}$，插值条件如下

$f(1/4) = 1/8$，$f(1) = 1$，$f(9/4) = 27/8$，$f'(1) = 3/2$

试给出三次Hermite插值多项式，并写出余项

解： 作差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商
1/4	1/8		
1	1	7/6	
9/4	27/8	19/10	11/30

$$p(x) = \frac{1}{8} + \frac{7}{6}(x - \frac{1}{4}) + \frac{11}{30}(x - \frac{1}{4})(x-1)$$
$$+ A(x - \frac{1}{4})(x-1)(x - \frac{9}{4})$$

将 $p'(1) = f'(1) = 3/2$ 代入可得 $A = -14/225$

插值举例

$$\boxed{p(x) = -\frac{14}{225}x^3 + \frac{263}{450}x^2 + \frac{233}{450}x - \frac{1}{25}}$$

余项 $R(x) = f(x) - p(x)$

$$= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-\frac{1}{4})(x-1)^2(x-\frac{9}{4})$$

$$= \frac{9\xi^{-5/2}}{4!\times 16}(x-\frac{1}{4})(x-1)^2(x-\frac{9}{4})$$

两点三次Hermite 插值

两点三次 Hermite 插值

插值节点： x_0 ， x_1

插值条件： $p(x_i) = f(x_i) = y_i$， $p'(x_i) = f'(x_i) = m_i$， $i = 0, 1$

仿照 Lagrange 多项式的思想，设

$$p(x) \triangleq H_3(x) = a_0\alpha_0(x) + a_1\alpha_1(x) + b_0\beta_0(x) + b_1\beta_1(x)$$

其中 $\alpha_0(x), \alpha_1, \beta_0(x), \beta_1(x)$ **均为 3 次多项式，且满足**

$$\alpha_j(x_i) = \delta_{ji}, \quad \alpha_j'(x_i) = 0,$$

$$\beta_j(x_i) = 0, \quad \beta_j'(x_i) = \delta_{ji} \qquad i,\ j = 0, 1$$

两点三次Hermite 插值

将插值条件代入立即可得

$$H_3(x) = y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + m_0\beta_0(x) + m_1\beta_1(x)$$

如何确定 $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \beta_0(x), \beta_1(x)$ 的表达式？

$\alpha_0(x)$

$$\alpha_0(x_0) = 1,\quad \alpha_0'(x_0) = 0,\quad \alpha_0(x_1) = 0,\quad \alpha_0'(x_1) = 0$$

$$\alpha_0(x_1) = 0,\quad \alpha_0'(x_1) = 0 \Rightarrow \alpha_0(x) = (ax+b)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

$$\alpha_0(x_0) = 1,\quad \alpha_0'(x_0) = 0 \Rightarrow$$

$$a = \frac{2}{x_1 - x_0},\quad b = \frac{x_1 - 3x_0}{x_1 - x_0} = 1 - \frac{2x_0}{x_1 - x_0}$$

两点三次Hermite 插值

$$\alpha_0(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

同理可得

$$\alpha_1(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

相类似地，可以推出

$$\beta_0(x) = (x - x_0)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$\beta_1(x) = (x - x_1)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

两点三次Hermite 插值

所以，满足插值条件

$$p(x_0)=f(x_0)=y_0,\quad p'(x_0)=f'(x_0)=m_0$$
$$p(x_1)=f(x_1)=y_1,\quad p'(x_1)=f'(x_1)=m_1$$

的三次 Hermite 插值多项式为

$$H_3(x)=y_0\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+y_1\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$
$$+\ m_0(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+m_1(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

余项

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \qquad \xi_x\in(x_0,x_1)$$

§3 分段低次插值

为什么分段低次插值

- 高次多项式插值的病态性质：

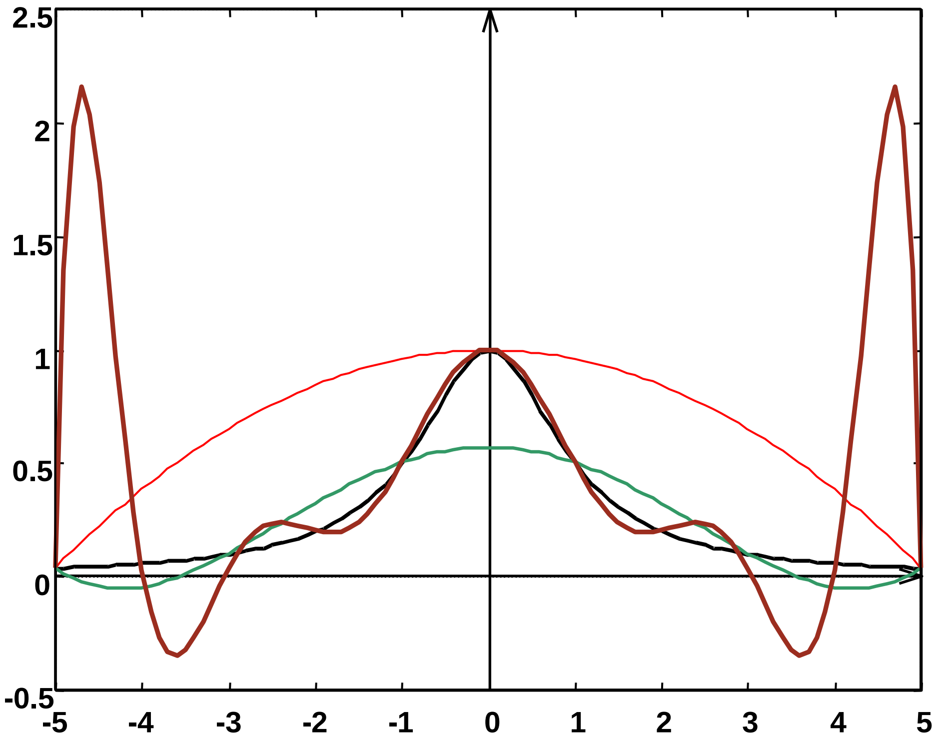
$n \to \infty$ 时 $L_n(x)$ 不一定收敛于 $f(x)$

插值多项式的次数并非越高越好！

例： Runge 函数的等距节点插值多项式

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5]$$

$$x_k = -5 + \frac{10k}{n}$$


2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

分段低次插值

- **分段低次插值**

  — 用分段**低次多项式**函数来逼近原函数 $f(x)$

- **常见的分段低次插值**
  - **分段线性插值**

    — 每个小区间上用**线性多项式**来逼近 $f(x)$

  - **分段三次 Hermite 插值**

    — 每个小区间上用**三次 Hermite多项式**来逼近 $f(x)$

分段线性插值

分段线性插值

设 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 为 $[a, b]$ 上的互异节点

$f(x)$ 在这些节点上的函数值为 $y_0, y_1, \ldots, y_n$

记 $h_k = x_{k+1} - x_k \qquad h = \max_k h_k$

求分段函数 $I_h(x)$ 满足

① $I_h(x) \in C[a,b]$

② $I_h(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n$

③ $I_h(x)$ 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是线性函数

分段线性插值

由以上条件直接可得 $I_h(x)$ 在小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的表达式

$$I_h(x) = y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

$x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

误差估计

误差估计

在小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上有

$$\left|f(x)-I_h(x)\right|=\left|\frac{f''(\xi_x^{(k)})}{2!}(x-x_k)(x-x_{k+1})\right|\le\frac{M_2}{2}\frac{h_k^2}{4}$$

$$\boxed{M_2=\max_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|}$$

$$\left|R(x)\right|=\left|f(x)-I_h(x)\right|\le\max_k\left|\frac{f''(\xi_x^{(k)})}{2!}(x-x_k)(x-x_{k+1})\right|\le\frac{M_2}{8}h^2$$

当 $h\to 0$ 时， $R(x)=f(x)-I_h(x)\to 0$

$I_h(x)$ 在 $[a, b]$ 上**一致收敛**到 $f(x)$

分段线性插值的缺点： $I_h(x)$ 在节点**不可导**

分段三次Hermite插值

分段三次 Hermite 插值

设 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 为 $[a, b]$ 上的互异节点

$y_k = f(x_k)$ ， $m_k = f'(x_k)$ ， $k = 0, 1, \ldots, n$

求分段函数 $I_h(x)$ 满足

① $I_h(x) \in C^1[a,b]$

② $I_h(x_k) = y_k, \quad I_h'(x_k) = m_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n$

③ $I_h(x)$ 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式

分段三次Hermite插值

由以上条件直接可得 $I_h(x)$ 在小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的表达式

$$I_h(x) = y_k\left(1+2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 + y_{k+1}\left(1+2\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$$

$$+\ m_k\left(x-x_k\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 + m_{k+1}\left(x-x_{k+1}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$$

$x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n\text{-}1$

- **误差估计**

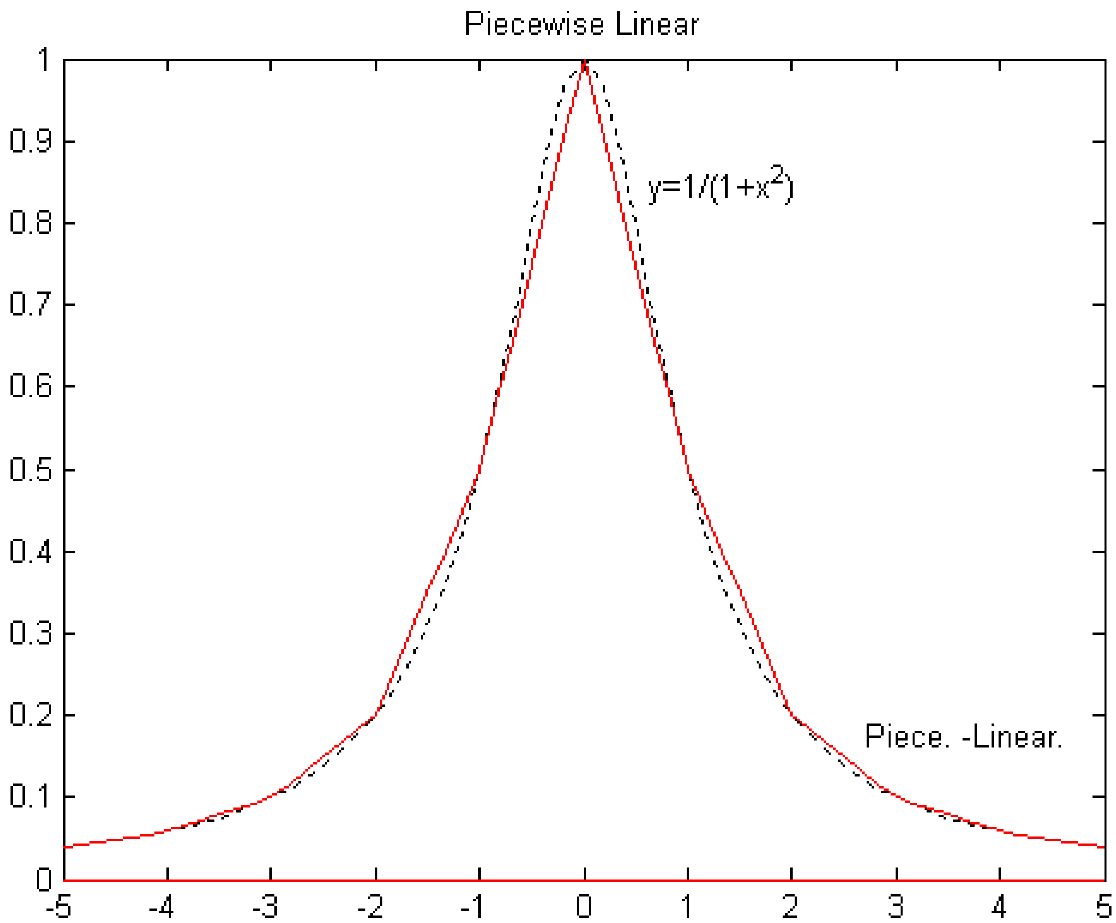
$$\left|R(x)\right| = \left|f(x) - I_h(x)\right| \le \frac{M_4}{384}h^4$$

$$\boxed{M_2 = \max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|, \quad h = \max_{0\le k\le n-1}(x_{k+1}-x_k)}$$

插值举例

例： 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 插值区间 $[-5,5]$，取等距节点（将插值区间10等分），试分别用分段线性插值和分段三次Hermite插值画出 $f(x)$ 的近似图像。

下图是用Matlab完成的分段线性插值（附程序）：



附：分段线性插值程序

```
n=11;  m=61;
x=-5:10/(m-1):5;
y=1./(1+x.^2);
z=0*x;
x0=-5:10/(n-1):5;
y0=1./(1+x0.^2);
y1=interp1(x0, y0, x);
plot(x, z, ’r’, x, y, ’k:’, x, y1, ’r’)
gtext(‘Piece. –linear.’), gtext(‘y=1/(1+x^2)’)
title(‘Piecewise Linear’)
```

注：interp1(x0,y0,x)为Matlab中现成的分段线性插值程序.

例2.8 已知 $f(x)$在四个节点上的函数值如下表所示

x_i	30	45	60	90
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

求$f(x)$ 在区间[30,90]上的分段连续线性插值函数$S(x)$

解 将插值区间[30,90] 分成连续的三个小区间

$$[30,45]\ \ [45,60]\ \ [60,90]$$

则 $f(x)$ 在区间[30,45] 上的线性插值为

$$S(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)=\frac{\sqrt{2}-1}{30}x+\frac{3}{2}-\sqrt{2}$$

$f(x)$ 在区间[45, 60]上的线性插值为

$$S(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{30}x+2\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$f(x)$ 在区间[60, 90]上的线性插值为

$$S(x)=\frac{x-x_3}{x_2-x_3}f(x_2)+\frac{x-x_2}{x_3-x_2}f(x_3)=\frac{2-\sqrt{3}}{60}x+\frac{3\sqrt{3}}{2}-2$$

将各小区间的线性插值函数连接在一起，得

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}-1}{30}x+\dfrac{3}{2}-\sqrt{2} & 30\le x\le 45\\ \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{30}x+2\sqrt{2}-\dfrac{3}{2}\sqrt{3} & 45\le x\le 60\\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{60}x+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-2 & 60\le x\le 90\end{cases}$$

分段插值注记

基本思想： 用分段低次多项式来代替单个多项式

具体作法：
(1) 把整个插值区间分割成多个小区间
(2) 在每个小区间上作低次插值多项式
(3) 将所有插值多项式拼接成一个多项式

优点： 公式简单、运算量小、稳定性好、收敛性 …

- 分段三次 Hermite 插值比分段线性插值效果更好
- 但公式较复杂，且需要额外信息（导数）

§4 三次样条插值

我们知道，给定n+1个节点上的函数值可以作n次插值多项式，但当n较大时，高次插值不仅计算复杂，而且可能出现Runge现象，采用分段插值虽然计算简单、也有一致收敛性，但不能保证整条曲线在连接点处的光滑性，如分段线性插值，其图形是锯齿形的折线，虽然连续，但处处都是“尖点”，因而一阶导数都不存在，这在实用上，往往不能满足某些工程技术的高精度要求。如在船体、飞机等外形曲线的设计中，不仅要求曲线连续，而且要有二阶光滑度，即有连续的二阶导数。这就要求分段插值函数在整个区间上具有连续的二阶导数。因此有必要寻求一种新的插值方法，这就是样条函数插值法

三次样条插值

给定插值节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ 及函数值

$$f(x_k) = y_k\ ,\quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

求一个定义在 $[a, b]$ 上的插值函数 $S(x)$，满足：

① $I_h(x) \in C^2[a,b]$ 即二阶连续可导

② 插值条件： $S(x_k) = f(x_k) = y_k$

③ 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式

三次样条插值

定义： 设插值节点为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

若函数 $S(x) \in C^2[a,b]$，且在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式，则称其为**三次样条函数**

如果同时还满足

$$S(x_k) = f(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

则称 $S(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的**三次样条插值函数**

三次样条插值

怎样计算三次样条插值函数

$S(x)$ 满足：

① $S(x)\in C^2[a,b]$；

② 在 $[x_k , x_{k+1}]$ 是三次多项式

③ $S(x_k) = y_k$ ， $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$S(x)=\begin{cases} s_0(x), & x\in[x_0,x_1] \\ s_1(x), & x\in[x_1,x_2] \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x), & x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases}$$

其中 $s_k(x)$ 为 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的三次多项式，且满足

$$s_k(x_k) = y_k, s_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$$

$k = 0, 1, \ldots, n\text{-}1$

边界条件

$$S(x)\in C^2[a,b] \Rightarrow S'(x_k^-)=S'(x_k^+),\ S''(x_k^-)=S''(x_k^+)$$

$$\Rightarrow \boxed{s_{k-1}'(x_k^-)=s_k'(x_k^+),\ s_{k-1}''(x_k^-)=s_k''(x_k^+)}$$

$(k = 1, 2, \ldots, n\text{-}1)$

每个 $s_k(x)$ 均为三次多项式，有 4 个待定系数，所以共有 $4n$ 个待定系数，故需 $4n$ 个方程。前面已经得到 $2n+2(n-1)=4n-2$ 个方程，还缺 2 个方程！

- 实际问题通常对样条函数在两个端点处的状态有要求，即所谓的 **边界条件**

常用的边界条件

- **第一类边界条件：** 给定函数在端点处的**一阶导数**，即

$$\boxed{S'(x_0)=f_0'\ ,\ S'(x_n)=f_n'}$$

- **第二类边界条件：** 给定函数在端点处的**二阶导数**，即

$$\boxed{S''(x_0)=f_0''\ ,\ S''(x_n)=f_n''}$$

当 $f_0''=f_n''=0$ 时，称为**自然边界条件**，此时的样条函数称为**自然样条函数**

- **第三类边界条件：** 若 $f(x)$ 是周期函数，且 x_n-x_0 是一个周期，于是要求 $S(x)$ 也是周期函数，即满足

$$\boxed{S(x_0^-)=S(x_n^+),\ S'(x_0^-)=S'(x_n^+),\ S''(x_0^-)=S''(x_n^+)}$$

三次样条函数的计算

$$\boxed{\text{设 } S''(x_k) = M_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n}$$

下面计算 $S(x)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 的表达式 $s_k(x)$

由于 $s_k(x)$ 是三次多项式，故 $s_k''(x)$ 为线性函数，且

$$s_k''(x_k) = M_k, \qquad s_k''(x_{k+1}) = M_{k+1}$$

由线性插值公式可得

$$\boxed{s_k''(x) = \frac{x_{k+1} - x}{h_k} M_k + \frac{x - x_k}{h_k} M_{k+1}}$$

$$h_k = x_{k+1} - x_k$$

求积分，可得

$$\boxed{s_k(x) = \frac{(x_{k+1} - x)^3}{6h_k} M_k + \frac{(x - x_k)^3}{6h_k} M_{k+1} + c_1 x + c_2}$$

三次样条函数的计算

将插值条件 $s_k(x_k)=y_k$，$s_k(x_{k+1})=y_{k+1}$ 代入，即可确定积分常数 c_1 和 c_2。整理后可得 $s_k(x)$ 的表达式为

$$s_k(x)=\frac{(x_{k+1}-x)^3}{6h_k}M_k+\frac{(x-x_k)^3}{6h_k}M_{k+1}+\left(y_k-\frac{M_k h_k^2}{6}\right)\frac{x_{k+1}-x}{h_k}+\left(y_{k+1}-\frac{M_{k+1}h_k^2}{6}\right)\frac{x-x_k}{h_k}$$

$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ n\text{-}1$$

只需确定 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 的值，即可给出 $s_k(x)$的表达式，从而可以得到 $S(x)$ 的表达式。

三次样条函数

注：$s_k(x) \in C^2[x_k, x_{k+1}]$ 的表达式，需写成如下形式

$$s_k(x) = a_3(x - x_k)^3 + a_2(x - x_k)^2 + a_1(x - x_k) + a_0$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + h_k}$$

$$s_k(x) = \frac{M_{k+1} - M_k}{6h_k}(x - x_k)^3 + \frac{M_k}{2}(x - x_k)^2 + \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{h_k(M_{k+1} + 2M_k)}{6}\right)(x - x_k) + y_k$$

三次样条函数的计算

条件： $s_{k-1}'(x_k^-) = s_k'(x_k^+)$

易知

$$s_k'(x) = -\frac{(x_{k+1}-x)^2}{2h_k}M_k + \frac{(x-x_k)^2}{2h_k}M_{k+1} + \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} - \frac{h_k}{6}(M_{k+1}-M_k)$$

$$\Rightarrow \frac{h_{k-1}}{6}M_{k-1} + \frac{h_{k-1}+h_k}{3}M_k + \frac{h_k}{6}M_{k+1} = \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} - \frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}$$

$$\underbrace{\boxed{\frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k}}}_{\mu_k} M_{k-1} + 2M_k + \underbrace{\boxed{\frac{h_k}{h_{k-1}+h_k}}}_{\lambda_k} M_{k+1} = \underbrace{6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]}_{d_k}$$

三次样条函数的计算

或

$$\boxed{\begin{aligned} &h_{k-1}M_{k-1}+2(h_{k-1}+h_k)M_k+h_kM_{k+1} \\ &\qquad =6\left(f[x_k,x_{k+1}]-f[x_{k-1},x_k]\right) \end{aligned}}$$

$k = 1, 2, \ldots, n\text{-}1$

三次样条函数的计算

整理后得关于 M_{k-1}, M_k 和 M_{k+1} 的方程：

$$\boxed{\mu_k M_{k-1} + 2M_k + \lambda_k M_{k+1} = d_k}$$

三弯矩方程

其中

$$\mu_k = \frac{h_{k-1}}{h_{k-1} + h_k}, \quad \lambda_k = \frac{h_k}{h_{k-1} + h_k}, \quad d_k = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$$

$$\boxed{\mu_k + \lambda_k = 1}$$

$k = 1, 2, \ldots, n\text{-}1$

共 n-1 个方程，附加边界条件，补充两个方程后，即可确定 n+1 个未知量 $M_0, M_1, \cdots, M_n$

第一类边界条件

- **第一类边界条件：** $S'(x_0) = f_0'$ ，$S'(x_n) = f_n'$

直接代入 $S_k(x)$ 的一阶导数表达式即得

$$2M_0 + M_1 = 6\left((y_1 - y_0)/h_0 - f_0'\right)\Big/h_0 \equiv d_0$$
$$M_{n-1} + 2M_n = 6\left(f_n' - (y_n - y_{n-1})/h_{n-1}\right)\Big/h_{n-1} \equiv d_n$$

与前面的 n-1 个方程联立可得 n+1 阶线性方程组：

系数矩阵严格对角占优，方程组存在唯一解。

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

第二类边界条件

- **第二类边界条件：** $S''(x_0)=f_0''$，$S''(x_n)=f_n''$

直接可得 $\boxed{M_0=f_0''\,,\ M_n=f_n''}$

故前面方程中只含 n-1 个未知量，即可得 n-1 阶线性方程组:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1-\mu_1 f_0'' \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1}-\lambda_{n-1} f_n'' \end{bmatrix}$$

系数矩阵严格对角占优，方程组存在唯一解。

第三类边界条件

- **第三类边界条件：** $S'(x_0)=S'(x_n),\ S''(x_0)=S''(x_n)$

可得

$$\boxed{M_0=M_n,\quad \lambda_n M_1+\mu_n M_{n-1}+2M_n=d_n}$$

其中

$$\lambda_n=h_0/(h_0+h_{n-1}),\qquad \mu_n=h_{n-1}/(h_0+h_{n-1}),$$

$$d_n=6\big(f[x_0,x_1]-f[x_{n-1},x_n]\big)/(h_0+h_{n-1})$$

与前面的 n-1 个方程联立可得 n 阶线性方程组：

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

系数矩阵**严格对角占优**，方程组**存在唯一解**。

具体计算过程

- 综上所述，满足插值条件 $s(x_j)=y_j$ 和某一类边界条件的三次样条函数**存在且唯一**！

- 具体计算过程

(1) 根据插值条件 $s(x_j)=y_j$ 和边界条件给出关于 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 的线性方程组

(2) 解出 $M_0, M_1, \cdots, M_n$；

(3) 将 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 代入 $s_j(x)$ 的表达式，写出三次样条函数 $S(x)$ 在整个插值区间上的分段表达式。

注：$s_k(x)\in C^2[x_k, x_{k+1}]$ 的表达式，需写成如下形式

$$s_k(x) = a_3(x-x_k)^3 + a_2(x-x_k)^2 + a_1(x-x_k) + a_0$$

具体计算过程

$$s_k(x)=\frac{(x_{k+1}-x)^3}{6h_k}M_k+\frac{(x-x_k)^3}{6h_k}M_{k+1}$$

$$+\left(y_k-\frac{M_k h_k^2}{6}\right)\frac{x_{k+1}-x}{h_k}+\left(y_{k+1}-\frac{M_{k+1}h_k^2}{6}\right)\frac{x-x_k}{h_k}$$

$$\boxed{x_{k+1}=x_k+h_k}$$

$$\Downarrow$$

$$s_k(x)=\frac{M_{k+1}-M_k}{6h_k}(x-x_k)^3+\frac{M_k}{2}(x-x_k)^2$$

$$+\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}-\frac{h_k(M_{k+1}+2M_k)}{6}\right)(x-x_k)+y_k$$

Matlab 中三次样条插值函数 spline 输出的多项式是按上面的格式输出的！

插值举例

例： 函数 $f(x)$ 定义在 $[27.7, 30]$ 上，插值节点及函数值如下，试求三次样条插值多项式 $S(x)$，满足边界条件 $S'(27.7)=3.0,\ S'(30)=-4.0$

x	27.7	28	29	30
$f(x)$	4.1	4.3	4.1	3.0

解：(板书)

误差估计

- **误差估计（了解）**

定理： 设 $f(x) \in C^4[a, b]$，$S(x)$ 为满足第一或第二类边界条件的三次样条函数，则

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-S(x)\right| \le \frac{5}{384}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|h^4$$

$$\max_{a\le x\le b}\left|f'(x)-S'(x)\right| \le \frac{1}{24}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|h^3$$

$$\max_{a\le x\le b}\left|f''(x)-S''(x)\right| \le \frac{3}{8}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|h^2$$

其中

$$h=\max_{0\le k\le n-1} h_k = \max_{0\le k\le n-1}\left|x_{k+1}-x_k\right|$$

证明：不要求

插值举例

例： 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，插值区间 $[-5,5]$，取 11 个等距节点，试同时画出 10 次插值多项式 $L_{10}(x)$ 与三次样条插值多项式 $S(x)$ 的函数图形

取 $S_{10}(x_k)=f(x_k)\quad(k=0,1,\cdots,10)$, $S'_{10}(-5)=f'(-5)$,

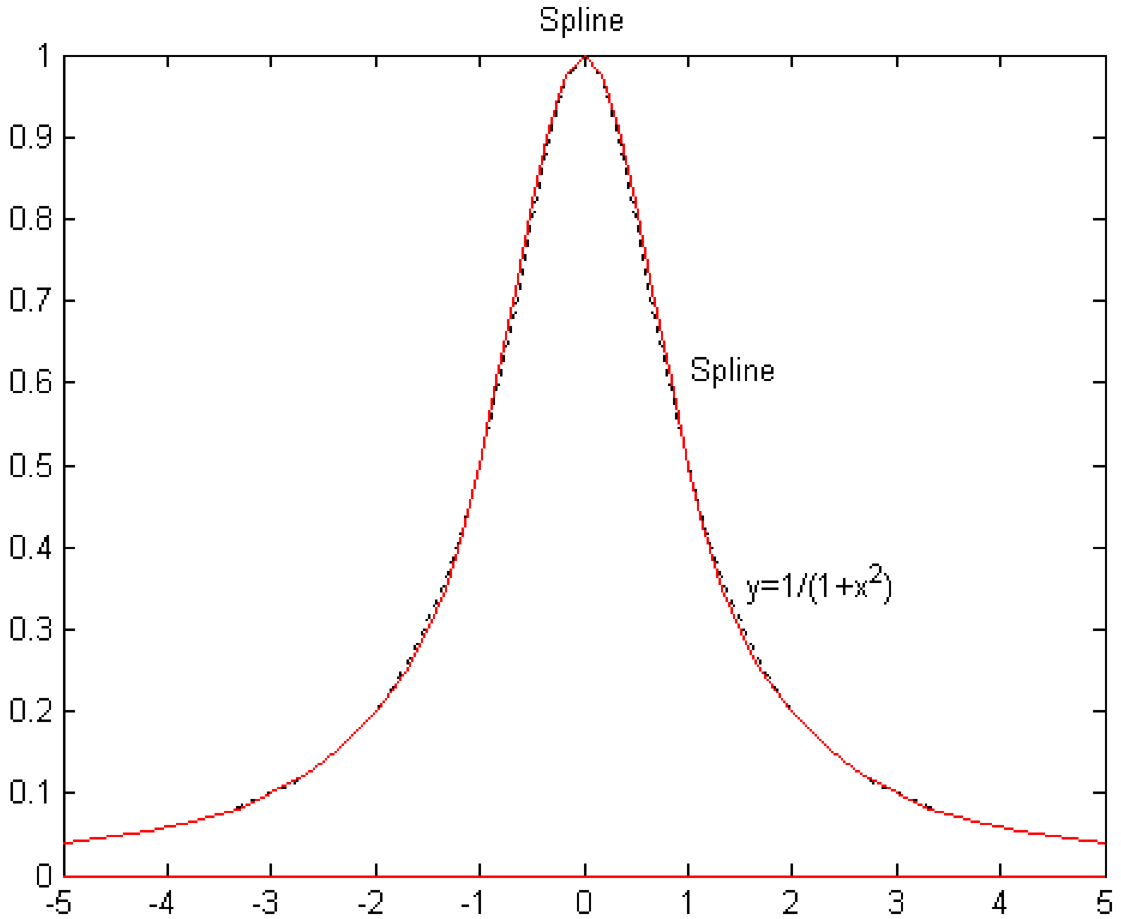
$S'_{10}(5)=f'(5)$.

直接上机计算可求出 $S_{10}(x)$ 在表2-6所列各点的值.

表2−6

x	$\frac{1}{1+x^2}$	$S_{10}(x)$	$L_{10}(x)$	x	$\frac{1}{1+x^2}$	$S_{10}(x)$	$L_{10}(x)$
−5.0	0.03846	0.03846	0.03846	−2.3	0.15898	0.16115	0.24145
−4.8	0.04160	0.03758	1.80438	−2.0	0.20000	0.20000	0.20000
−4.5	0.04706	0.04248	1.57872	−1.8	0.23585	0.23154	0.18878
−4.3	0.05131	0.04842	0.88808	−1.5	0.30769	0.29744	0.23535
−4.0	0.05882	0.05882	0.05882	−1.3	0.37175	0.36133	0.31650
−3.8	0.06477	0.06556	−0.20130	−1.0	0.50000	0.50000	0.50000
−3.5	0.07547	0.07606	−0.22620	−0.8	0.60976	0.62420	0.64316
−3.3	0.08410	0.08426	−0.10832	−0.5	0.80000	0.82051	0.84340
−3.0	0.10000	0.10000	0.10000	−0.3	0.91743	0.92754	0.94090
−2.8	0.11312	0.11366	0.19837	0	1.0000	1.0000	1.0000
−2.5	0.13793	0.13971	0.25376				

下图是用Matlab完成的样条插值（附程序）：

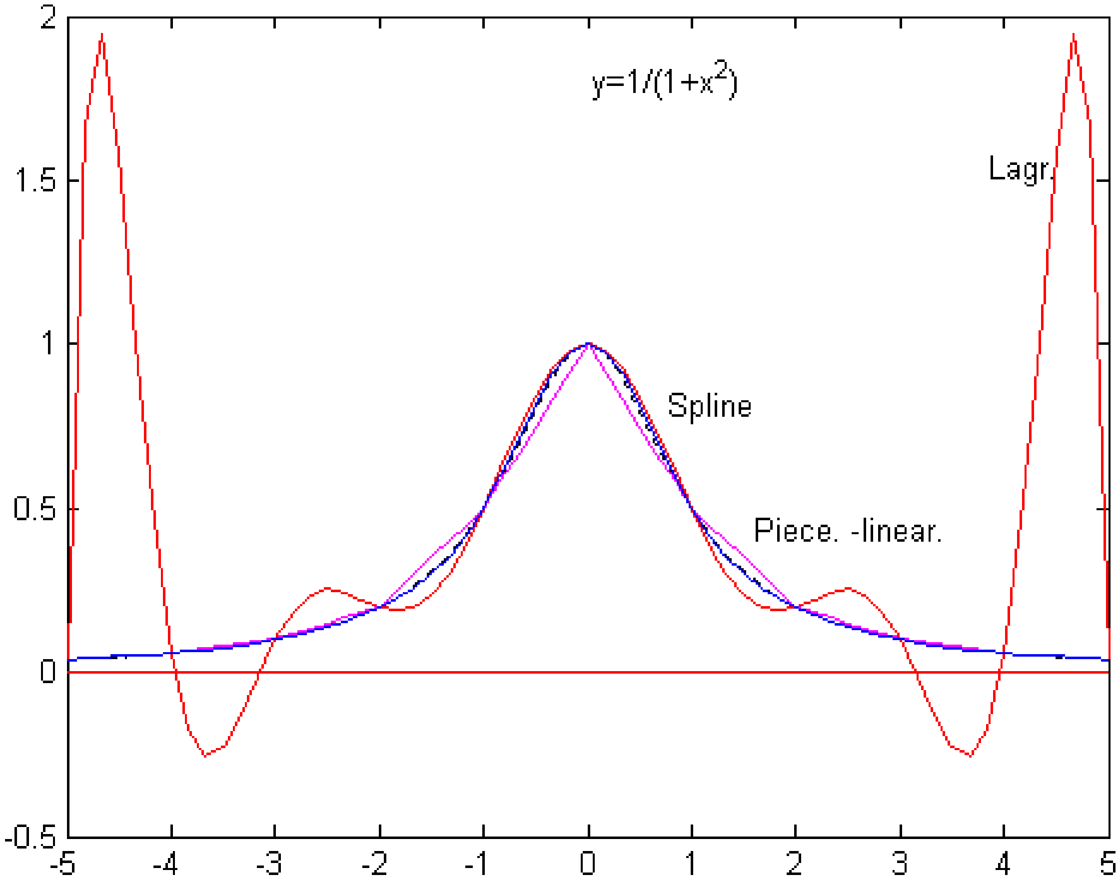


附：样条插值程序

```
n=11;  m=61;
x=-5:10/(m-1):5;
y=1./(1+x.^2);
z=0*x;
x0=-5:10/(n-1):5;
y0=1./(1+x0.^2);
y1=interp1(x0, y0, x, ’spline’);
plot(x, z, ’r’, x, y, ’k:’, x, y1, ’r’)
gtext(‘Spline’), gtext(‘y=1/(1+x^2)’)
title(‘Spline’)
```

注：interp1(x0, y0, x, ’spline’)为Matlab中现成的样条插值程序.

也可以将三种插值结果画在一起：



用三次样条绘制的曲线不仅有很好的光滑度，而且当节点逐渐加密时，其函数值在整体上能很好地逼近被插函数，相应的导数值也收敛于被插函数的导数，不会发生龙格现象。因此三次样条在计算机辅助设计中有广泛的应用。

Matlab 实现

- 例 对正弦曲线上的数据点(0，0)，　(pi/2, 1)，　(pi，0)，(3pi/2，-1)进行多项式插值

```
>> x=[0 pi/2 pi 3*pi/2]

x =

         0    1.5708    3.1416    4.7124

>> y=[0 1 0 -1]'

y =

     0
     1
     0
    -1

>>
```

```
>> V=vander(x)

V =

         0         0         0    1.0000
    3.8758    2.4674    1.5708    1.0000
   31.0063    9.8696    3.1416    1.0000
  104.6462   22.2066    4.7124    1.0000

>> V=fliplr(V)

V =

    1.0000         0         0         0
    1.0000    1.5708    2.4674    3.8758
    1.0000    3.1416    9.8696   31.0063
    1.0000    4.7124   22.2066  104.6462
```

```
>> p=V\y

p =

         0
    1.6977
   -0.8106
    0.0860

>> p=flipud(p)

p =

    0.0860
   -0.8106
    1.6977
         0
```

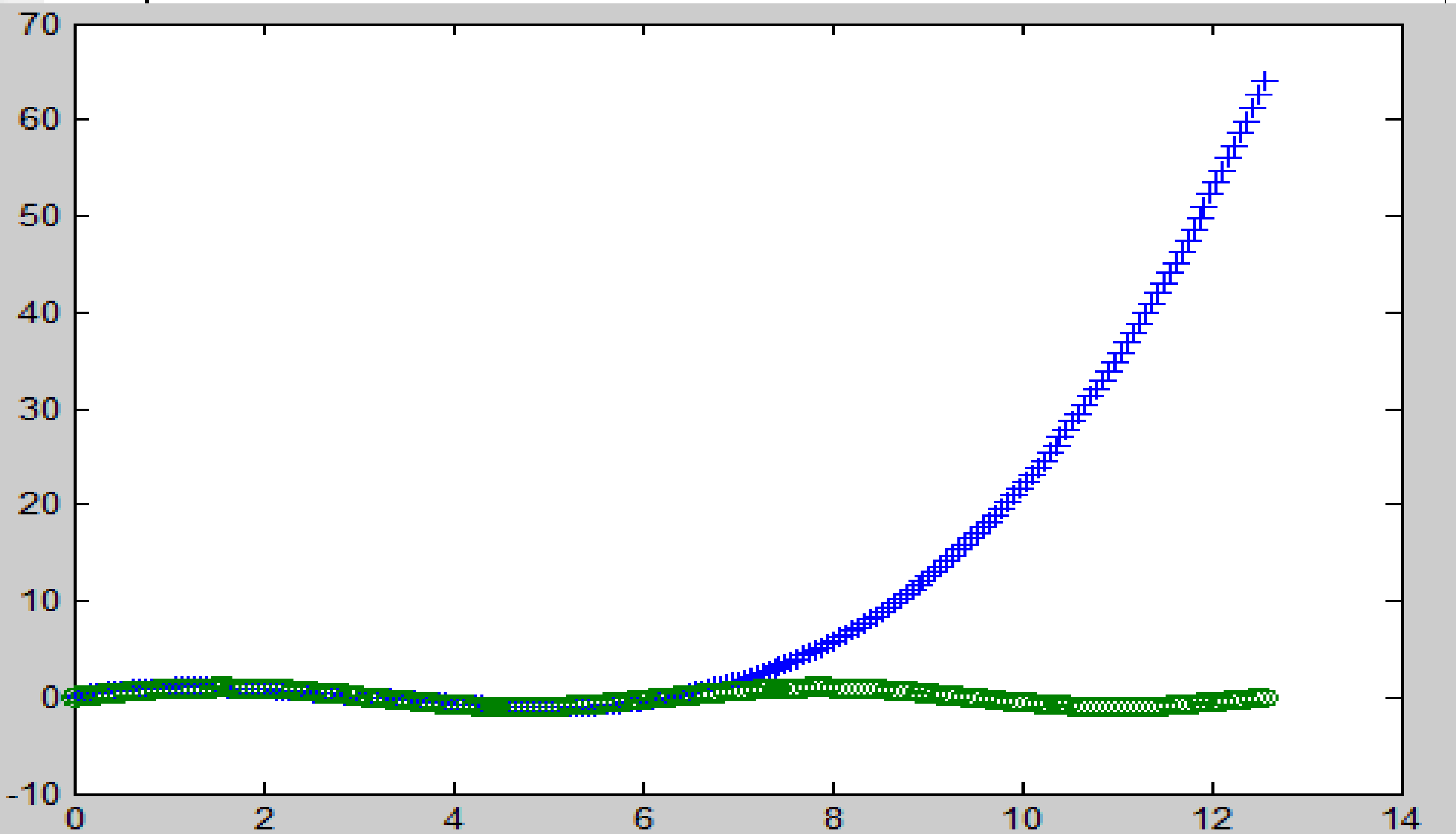
```
>> z=rand

z =

    0.8147

>> p(1)*z^3+p(2)*z^2+p(3)*z+p(4)

ans =

    0.8916
```

```
>> polyval(p,z)

ans =

    0.8916
```

- Polyval还可以计算多项式在向量上的值

```
>> z=linspace(0,2*pi,100);
>> zy=polyval(p,z);
>> plot(z,zy,'+',z,sin(z),'o')
```

```
>> z=linspace(0,4*pi,200);
>> zy=polyval(p,z);
>> plot(z,zy,'+',z,sin(z),'O')
```



- 也可以使用内部命令polyfit进行插值

```
>> pnew=polyfit(x,y',3)

pnew =

    0.0860   -0.8106    1.6977   -0.0000

>> p

p =

    0.0860
   -0.8106
    1.6977
         0
```

Matlab插值函数

■ Matlab 中的插值函数

```
interp1  % 分段插值（线性，Hermite，样条）
```

```
spline   % 三次样条插值
```

```
csape  % 可以指定边界条件的三次样条插值
```

```
ppval、fnval  % 计算插值函数在给定点的值
```

不建议使用该语法。请改用 griddedInterpolant

具体用法请学习Matlab的griddedInterpolant参考页。2016版有中文的使用说明，一维到多维插值都可以实现

interp1

- **一维函数插值**

```
yh=interp1(x,y,xh)
```

  - *x* 为包含插值节点的 *n* 维向量
  - *y* 为函数在插值节点的值，也是 *n* 维向量
  - *xh* 为需要插值点，可以是一个点，也可以是向量
  - 采用分段线性插值方法

interp1

- **一维函数插值**

```
yh=interp1(x,y,xh,method)
```

- **可指定插值方法：'nearest'，'linear'，'spline'，'pchip'**
- **缺省为分段线性插值**
- **'pchip' 为分段三次 Hermite 插值**
- **'spline' 为样条插值，等价于 `spline`**

interp1 举例

例： 已知函数 $f(x)$ 的函数值如下 ($\ln x$)

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

试用分段线性插值方法计算 $f(x)$ 在 0.45, 0.54, 0.63, 0.72, 0.78 处的近似值

```
x=[0.4,0.5,0.6,0.7,0.8]; % 插值节点
y=[-0.9163,-0.6931,-0.5108,-0.3567,-0.2231];
xh=[0.45,0.54,0.63,0.72,0.78]; % 需要插值的点
yh=interp1(x,y,xh); % 函数在插值点的近似值
plot(x,y,'ob', xh,yh,'s')
```

spline

- **三次样条插值**

```
yh=spline(x,y,xh)
```

- x 为包含插值节点的 n 维向量
- y 为函数在插值节点的值，也是 n 维向量
- xh 为需要插值的点，可以是一个点，也可以是向量
- 采用三次样条插值方法

spline

- 三次样条插值（返回插值函数）

```
pp=spline(x,y)
```

返回一个结构类型的数据

- `pp.breaks`　插值节点
- `pp.coefs`　插值多项式系数
- `pp.pieces`　多项式个数
- `pp.order`　每个多项式系数的个数
- `pp.dim`　插值维数

- 计算插值函数在给定点的值，可以使用 ppval 或 fnval

```
yh=ppval(pp,xh)
yh=fnval(pp,xh)
```

spline

- **边界条件**
  - 若 x 与 y 的长度相等，则边界条件为：(not-a-knot)

$$\boxed{S^{(3)}(x_1^-) = S^{(3)}(x_1^+), \quad S^{(3)}(x_{n-1}^-) = S^{(3)}(x_{n-1}^+)}$$

  - 若 y 比 x 多 2 个分量，则采用第一类边界条件：

$$\boxed{y = [f'(x_0), f(x_0), \ldots, f(x_{n-1}), f'(x_n)]}$$

$$\boxed{x_0 = \min(x), \quad x_n = \max(x)}$$

spline 举例

例： 函数 $f(x)$ 定义在 $[27.7, 30]$ 上，插值节点及函数值如下，试求三次样条插值多项式 $S(x)$，满足边界条件 $S'(27.7)=3.0,\ S'(30)=-4.0$

x	27.7	28	29	30
$f(x)$	4.1	4.3	4.1	3.0

```
x=[27.7, 28, 29, 30]; % 插值节点
y=[4.1, 4.3, 4.1, 3.0];
pp=spline(x,[3.0, y, -4.0]);
```

```
xh=27.7:0.1:30; % 需要插值的点
yh=ppval(pp,xh); % 插值函数在插值点的值
plot(xh,yh);
```

csape

- **可以指定边界条件的三次样条插值**

```
pp = csape(x,y,conds)
```

边界条件由 **conds** 指定：

- **'complete'** ：第一类边界条件（缺省边界条件）

$$f_0'=y(1),\ \ f_n'=y(n+2)$$

- **'not-a-knot'** ：非扭结
- **'periodic'** ：周期（第三类）边界条件
- **'second'** ：第二类边界条件

$$f_0''=y(1),\ \ f_n''=y(n+2)$$

- **'variational'** ：自然边界条件

csape 属于 Curve Fitting Toolbox

csape 举例

例： 函数 $f(x)$ 定义在 $[27.7, 30]$ 上，插值节点及函数值如下，试求三次样条插值多项式 $S(x)$，满足边界条件 $S'(27.7)=3.0,\ S'(30)=-4.0$

x	27.7	28	29	30
$f(x)$	4.1	4.3	4.1	3.0

```
x=[27.7, 28, 29, 30]; %插值节点
y=[4.1, 4.3, 4.1, 3.0];
pp=csape(x,[3.0, y, -4.0]);
```

```
xh=27.7:0.1:30; % 需要插值的点
yh=fnval(pp,xh); % 插值函数在插值点的值
plot(xh,yh);
```

各种插值方法的权衡问题

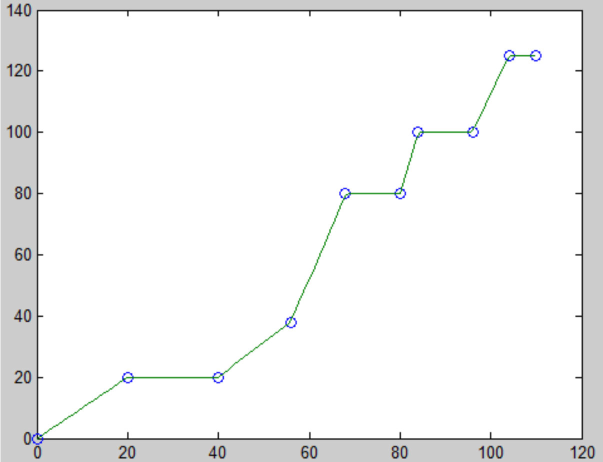
有人对汽车进行了一次实验，即在行驶中先加速，然后再保持匀速行驶一段时间，接着再加速，然后再保持匀速，如此交替。注意，整个实验过程从未减速。在一组数据点上的速度如表所示

t	0	20	40	56	68	80	84	96	104	110
v	0	20	20	38	80	100	100	100	125	125

解（1）线性插值

```
>> t=[0 20 40 56 68 80 84 96 104 110];
>> v=[0 20 20 38 80 80 100 100 125 125];
>> tt=linspace(0,110);% linspace(a,b,n)在 a 到 b 之间自动生成n 个等距点，默认是 100 个点。
>> v1=interp1(t,v,tt);
>> plot(t,v,'o',tt,v1)
```

结果如图 2.3(a)，曲线不光滑，但并没有超出数据范围。

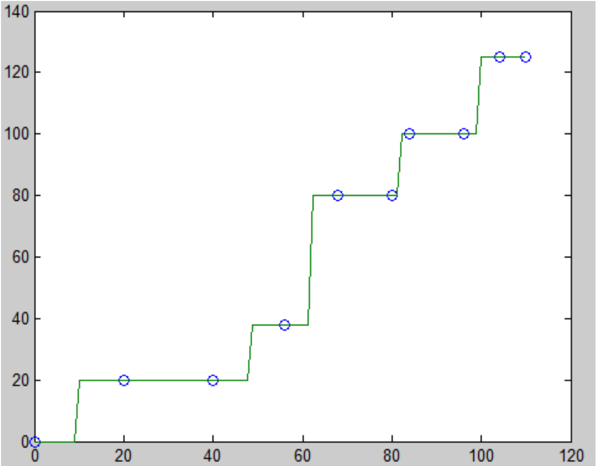


(a) 线性

（2）最近邻插值

```
>> vn=interp1(t,v,tt,'nearest');
>> plot(t,v,'o',tt,vn)
```

结果如图 2.3(b)， 水平直线的连接， 既不光滑也不准确。

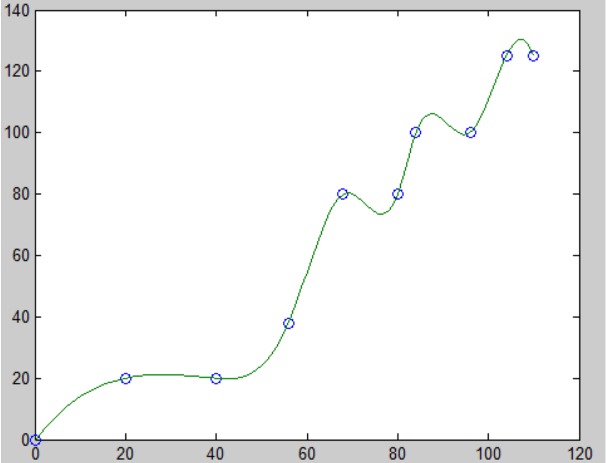


(b) 最近邻

（3）分段三次样条插值

```
>> vs=interp1(t,v,tt,'spline');
>> plot(t,v,'o',tt,vs)
```

结果如图 2.3(c)， 曲线很光滑，但是有几个地方的拟合结果超出了数据范围，汽车好像减了几次速。

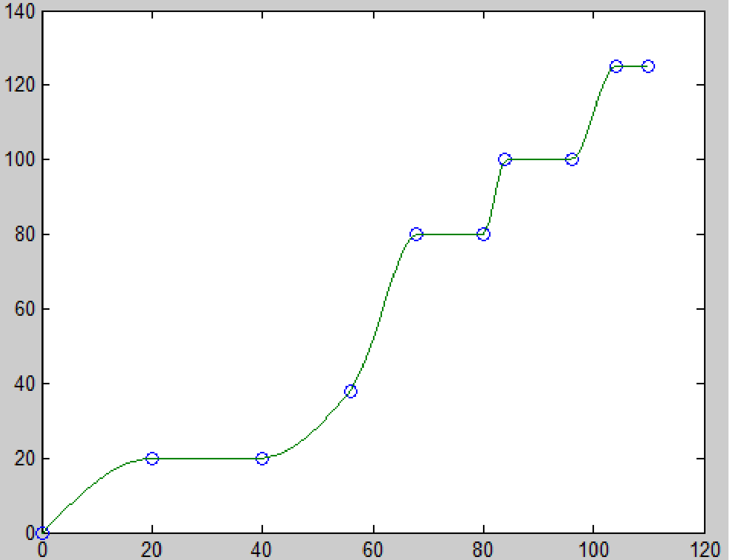


(c) 样条

（4）分段三次 Hermite 插值

```
>> vh=interp1(t,v,tt,'pchip');
>> plot(t,v,'o',tt,vh)
```

结果如图 2.3(d)，从物理背景上看是真实的。因为分段三次 Hermite 插值具有保形性，所以速度单调增加，未出现减速现象。虽然曲线不如三次样条曲线光滑，但是一阶导数在节点处的连续性是的数据点之间的变化更加平缓，从而增加了真实性。



(d) pchip

刘焯(音：卓) 字士元,信都昌亭(今河北冀县)人。公元544～公元610年。隋代天文学家。着力研习《九章算术》、《周髀》、《七曜历书》等；还著有《稽极》10卷，《历书》10卷。提出新法，编有《皇极历》，在历法中首次考虑太阳视差运动的不均匀性，创立用**三次差内插法**来计算日月视差运动速度，推算出五星位置和日、月食的起运时刻。这是中国历法史上的重大突破。

张遂（公元683—727年），汉族，高僧一行的俗称。唐代杰出天文学家。唐玄宗时主持修订历法，根据测定事实，得出恒星是运动的结论，编写了《开元大衍历》、《七政长历》、《易论》等书。在**世界上首次推算出子午线纬度一度之长**。他也是佛教密宗的领袖，著有密宗权威著作《大日经疏》。

天算史界有一种流行的看法，认为在中国古代，一行在其《大衍历》中发明了**二次不等间距插值法**，且一行还有意识地应用了**三次差内插法**近似公式。