

Chapter3 运输规划

(Transportation Problem)



本章主要内容:

- 运输规划问题的数学模型
- 表上作业法
- 运输问题的应用



例3.1 某公司从两个产地 A_1 、 A_2 将物品运往三个销地 B_1 , B_2 , B_3 , 各产地的产量、各销地的销量和各产地运往各销地每件物品的运费如下表所示, 问: 应如何调运可使总运输费用最小?

	B1	B2	B3	产量
A1	6	4	6	200
A2	6	5	5	300
销量	150	150	200	



运输规划问题的数学模型

解：产销平衡问题：总产量 = 总销量 = 500

设 x_{ij} 为从产地 A_i 运往销地 B_j 的运输量，得到下列运输量表：

	B1	B2	B3	产量
A1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	200
A2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	300
销量	150	150	200	

$$\text{Min } z = 6x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 6x_{21} + 5x_{22} + 5x_{23}$$

$$\begin{array}{l} \text{s.t. } \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 300 \end{array} \right. \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 300 \end{array}} \right\} \text{产量} \\ \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} = 150 \\ x_{12} + x_{22} = 150 \\ x_{13} + x_{23} = 200 \end{array} \right. \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} = 150 \\ x_{12} + x_{22} = 150 \\ x_{13} + x_{23} = 200 \end{array}} \right\} \text{销量} \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2; j = 1, 2, 3) \end{array}$$

运输问题的一般形式：产销平衡

A_1 、 A_2 、 $\dots$ 、 A_m 表示某物资的 m 个产地； B_1 、 B_2 、 $\dots$ 、 B_n 表示某物质的 n 个销地； a_i 表示产地 A_i 的产量； b_j 表示销地 B_j 的销量； c_{ij} 表示把物资从产地 A_i 运往销地 B_j 的单位运价。设 x_{ij} 为从产地 A_i 运往销地 B_j 的运输量，得到下列一般运输量问题的模型：

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ s.t. &\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i & i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0, & i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

运输问题是线性规划问题的特例。

运输问题就是研究如何组织调运，既满足各销地的需求，又使总运费最小。

	B_1	B_2	...	B_n	供应量
A_1	$c_{11} x_{11}$	$c_{12} x_{12}$	...	$c_{1n} x_{1n}$	a_1
A_2	$c_{21} x_{21}$	$c_{22} x_{22}$	...	$c_{2n} x_{2n}$	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	$c_{m1} x_{m1}$	$c_{m2} x_{m2}$	...	$c_{mn} x_{mn}$	a_m
需求量	b_1	b_2	...	b_n	

运输问题的约束方程组系数矩阵及特征

$$\begin{array}{c}
 \textcolor{red}{x_{11}} \textcolor{red}{x_{12}} \dots \textcolor{red}{x_{1n}} \quad \textcolor{red}{x_{21}} \textcolor{red}{x_{22}} \dots \textcolor{red}{x_{2n}} \quad \dots \quad \textcolor{red}{x_{m1}} \textcolor{red}{x_{m2}} \dots \textcolor{red}{x_{mn}} \\
 A = \begin{pmatrix}
 1 & 1 & \dots & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \dots & 1 & \\
 & & & & & & \dots & & \\
 & & & & & & & 1 & 1 & \dots & 1 \\
 1 & & & & 1 & & & & 1 & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & 1 & \\
 & & \ddots & & & \ddots & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & & & & 1
 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} m \text{行} \\
 \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} n \text{行}
 \end{array}$$

- 矩阵A是一个 $m+n$ 行 mn 列的矩阵，它的秩为 $m+n-1$ 。
- 运输问题应该有 $m+n-1$ 个基变量。

- 特征1：运输问题一定有可行解；
- 特征2：运输问题一定有最优解；
- 特征3：运输问题每一组基对应 $m+n-1$ 个基变量；
- 特征4：运输问题的 $m+n-1$ 个基变量构成的变量组不含闭回路；
- 特征5：任意一个非基变量和 $m+n-1$ 个基变量组成的变量组中必定存在一条并且只存在唯一一条闭回路；
- 特征6：如果运输问题中的供应量和需求量都是整数，则任一基解中各变量的取值也都是整数。

表上作业法是一种求解运输问题的特殊方法，其实质是单纯形法。

步骤	描述	方法
第一步	求初始基行可行解（初始调运方案）	最小元素法、元素差额法、
第二步	求检验数并判断是否得到最优解当非基变量的检验数 σ_{ij} 全都非负时得到最优解，若存在检验数 $\sigma_{ij} < 0$ ，说明还没有达到最优，转第三步。	闭回路法和位势法
第三步	调整运量，即换基，选一个变量出基，对原运量进行调整得到新的基可行解，转入第二步	

例3.2 某运输资料如下表所示：

单位 销地 运价 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	3	10	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7	4	10	5	9
销量	3	6	5	6	

问：应如何调运可使总运输费用最小？

解：第1步 求初始方案

方法1：最小元素法

基本思想是就近供应，即从运价最小的地方开始供应（调运），然后次小，直到最后供完为止。

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	产量
A ₁	3	11	3	10	7
A ₂	1	9	2	8	4
A ₃	7	4	10	5	9
销量	3	6	5	6	

总的运输费 = $(3 \times 1) + (6 \times 4) + (4 \times 3) + (1 \times 2) + (3 \times 10) + (3 \times 5) = 86$ 元

元素差额法对最小元素法进行了改进，考虑到产地到销地的最小运价和次小运价之间的差额，如果差额很大，就选最小运价先调运，否则会增加总运费。例如下面两种运输方案。

最小元素法：

8 10	5	10
2 5	1 15	20
15	15	

总运费是 $z = 10 \times 8 + 5 \times 2 + 15 \times 1 = 105$

后一种方案考虑到 C_{11} 与 C_{21} 之间的差额是 $8 - 2 = 6$ ，如果不先调运 x_{21} ，到后来就有可能 $x_{11} \neq 0$ ，这样会使总运费增加较大，从而先调运 x_{21} ，再是 x_{22} ，其次是 x_{12}

8	5 10	10
2 15	1 5	20
15	15	

总运费 $z = 10 \times 5 + 15 \times 2 + 5 \times 1 = 85$



用元素差额法求得的基本可行解更接近最优解，所以也称为近似方案。

方法2: Vogel法

1) 从运价表中分别计算出各行和各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行。

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	产量	行差额
A ₁	3	11	3	10	7	7
A ₂	1	9	2	8	4	1
A ₃	7	4	10	5	9	1
销量	3	6	5	6		
列差额	2	5	1	3		

2) 再从差值最大的行或列中找出最小运价确定供需关系和供需数量。当产地或销地中有一方数量供应完毕或得到满足时，划去运价表中对应的行或列。

重复1)和2)，直到找出初始解为止。

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	产量	行差额
A ₁	3	11	3	10	7	7
A ₂	1	9	2	8	4	1
A ₃	7	4	10	5	9	1
销量	3	6	5	6		
列差额	2	5	1	3		

单位销地 运价产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	3	11	35	10	7	7
A_2	1	9	2X	8	4	1
A_3	7	4	10X	5	9	1
销量	3	6	5	6		
列差额	2	5	1	3		

单位 销地 运价 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	3 ×	11	3 5	10	7	7
A_2	1 3	9	2 ×	8	4	7
A_3	7 ×	4	10 ×	5	9	1
销量	3	6	5	6		
列差额	2	5	—	3		

单位 销地 运价 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	3 ×	11 ×	3 (5)	10 (2)	7	1
A_2	1 (3)	9 ×	2 ×	8 (1)	4	1
A_3	7 ×	4 (6)	10 ×	5 (3)	9	1
销量	3	6	5	6		
列差额	—	(5)	—	3		

该方案的总运费:

$$(1 \times 3) + (4 \times 6) + (3 \times 5) + (2 \times 10) + (1 \times 8) + (3 \times 5) = 85 \text{元}$$

第2步 最优解的判别（检验数的求法）

求出一组基可行解后，判断是否为最优解，仍然是用检验数来判断，记 x_{ij} 的检验数为 λ_{ij} 由第一章知，求最小值的运输问题的最优判别准则是：

所有非基变量的检验数都非负，则运输方案最优

检验数的定义：非基变量的取值每增加1时，总运费的增加量。

运输问题的最优性条件：表上所有空格的检验数非负

求检验数的方法有两种：

- ◆ 闭回路法
- ◆ 位势法 (▲)

闭回路的概念

称集合 $\{x_{i_1j_1}, x_{i_1j_2}, x_{i_2j_2}, x_{i_2j_3}, \dots, x_{i_sj_s}, x_{i_sj_1}\}$

(其中 $i_1, i_2, \dots, i_s; j_1, j_2, \dots, j_s$ 互不相同)

为一个闭回路，集合中的变量称为回路的顶点，相邻两个变量的连线为闭回路的边。如下表

例下表中闭回路的变量集合是 $\{x_{11}, x_{12}, x_{42}, x_{43}, x_{23}, x_{25}, x_{35}, x_{31}\}$ 共有8个顶点，这8个顶点间用水平或垂直线段连接起来，组成一条封闭的回路。

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	x_{11}	x_{12}			
A_2			x_{23}		x_{25}
A_3	x_{31}				x_{35}
A_4		x_{42}	x_{43}		

一条回路中的顶点数一定是偶数，回路遇到顶点必须转90度与另一顶点连接，表3-3中的变量 x_{32} 及 x_{33} 不是闭回路的顶点，只是连线的交点。

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1		3 X_{12}		8 X_{14}	
A_2	7		5		
A_3		2 X_{32}		X_{34} 4	
A_4			1	6	

- (1) 画法：从空格开始，只有碰到数字格（基变量）才能旋转90度，直至回到起点（遇到基变量可以旋转也可以不旋转）。
- (2) 性质：凡可行调运方案均只能画唯一闭回路；
- (3) 除起点和终点是同一格外，其余顶点均为基格的曲折闭合多边形；闭回路上同一行（列）的顶点有偶数个；

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	X_{11}	X_{12}			
A_2	X_{21}	X_{22}		X_{24}	
A_3					
A_4		X_{42}		X_{44}	

- 闭回路法：求空格（非基变量）的检验数；
- 沿空格的闭回路增加1单位的运输量，由此带来的费用代数和就是该空格的检验数。

基变量不含闭回路，但任何一个非基变量都可以与基变量构成唯一一条闭回路

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	库存量
A ₁	2	9	10	7	9
A ₂	1	3	4	2	5
A ₃	8	4	2	5	7
需求量	3	8	4	6	

Diagram illustrating a closed loop (闭回路) for optimality testing. The loop is formed by the non-basic variable (3) in cell (A₁, B₁) and the basic variables (6) in cell (A₁, B₂), (2) in cell (A₂, B₂), (3) in cell (A₂, B₃), (1) in cell (A₃, B₃), and (6) in cell (A₃, B₄). The loop is marked with dashed lines and red numbers indicating the adjustment: -1 for the non-basic variable and +1 for the basic variables.

$$\sigma_{14} = c_{14} - c_{12} + c_{22} - c_{23} + c_{33} - c_{34} = 7 - 9 + 3 - 4 + 2 - 5 = -6$$

表上作业法

含义： x_{14} 每增加一个单位，总运费增加-6个单位

	B_1		B_2		B_3		B_4		库存量
A_1	2		9		10		7		9
		3		6		0		-6	
A_2	1		3		4		2		5
		5		2		3		-5	
A_3	8		4		2		5		7
		14		3		1		6	
需求量	3		8		4		6		

所有非基变量的检验数见上表

用位势法对初始方案进行最优性检验：

1) 由 $\sigma_{ij}=C_{ij}-(U_i+V_j)$ 计算位势 U_i ， V_j ，因对基变量而言有 $\sigma_{ij}=0$ ，即 $C_{ij}-(U_i+V_j)=0$ ，令 $U_1=0$

2) 再由 $\sigma_{ij}=C_{ij}-(U_i+V_j)$ 计算非基变量的检验数 σ_{ij}

	B_1	B_2	B_3	B_4	U_i
A_1	3 1	11 2	3 4	10 3	0
A_2	1 3	9 1	2 1	8 -1	-1
A_3	7 10	4 6	10 12	5 3	-5
V_j	2	9	3	10	

当存在非基变量的检验数 $\sigma_{kl} \geq 0$ ，说明现行方案为最优方案，否则目标成本还可以进一步减小。

第3步 确定换入基的变量

当存在非基变量的检验数 $\sigma_{kl} < 0$ 且 $\sigma_{kl} = \min\{\sigma_{ij}\}$ 时, 令 X_{kl} 进基。从表中知可选 X_{24} 进基。

第4步 确定换出基的变量

以进基变量（非基变量） x_{ik} 为起点的闭回路中, 标有负号的最小运量作为调整量 θ , θ 对应的基变量为出基变量, 奇数格上 $+\theta$, 偶数格上 $-\theta$ 。

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	U _i
A ₁	3	11	3	10	
A ₂	1	9	2	8	
A ₃	7	4	10	5	
V _j					

$$\theta = \min\{x_{23}, x_{14}\} = \min\{1, 3\} = 1$$

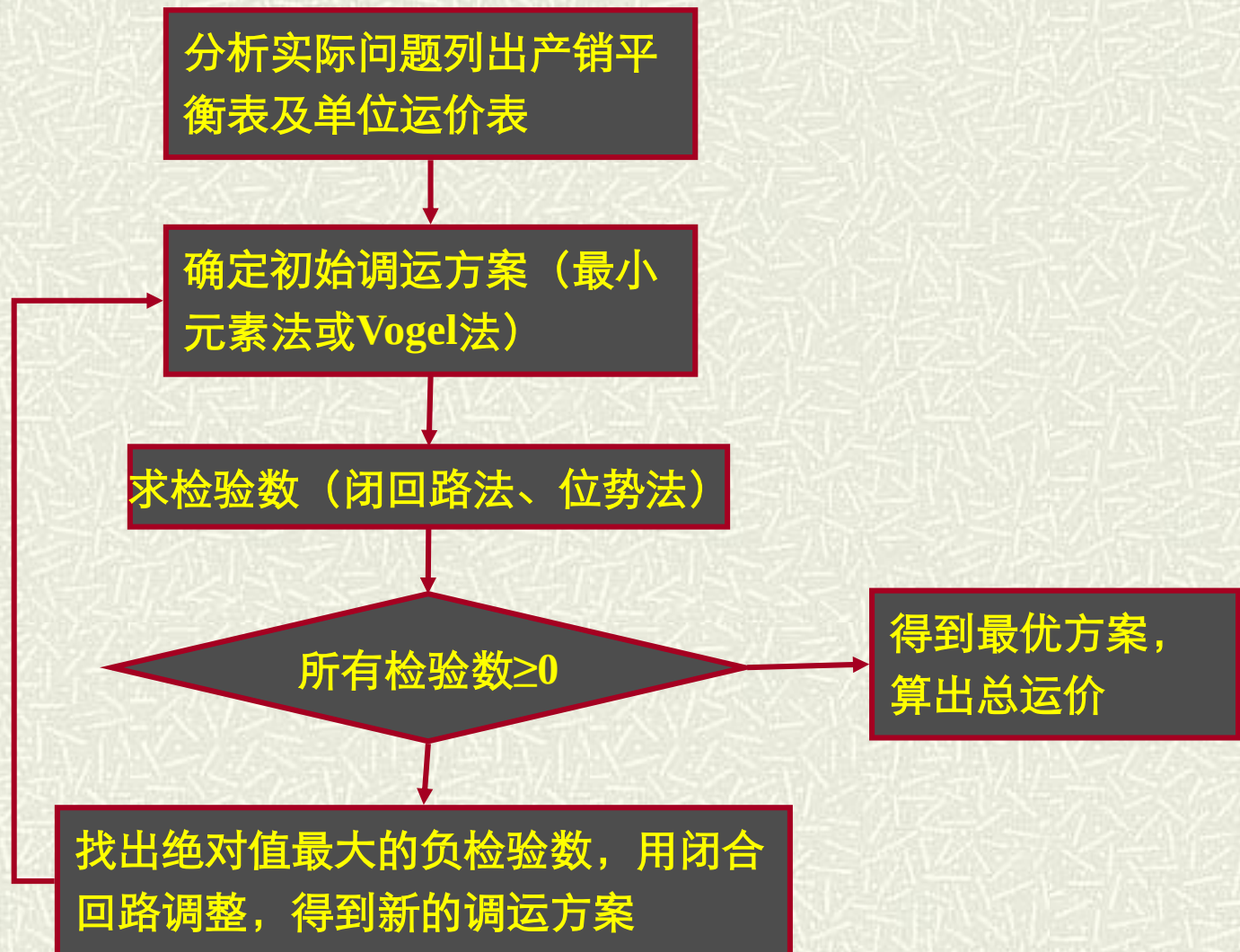
调整步骤为：在进基变量的闭回路中标有正号的变量加上调整量 θ ，标有负号的变量减去调整量 θ ，其余变量不变，得到一组新的基可行解。然后求所有非基变量的检验数重新检验。

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	U _i
A ₁	3 ⁰	11 ²	3 ⁵	10 ²	0
A ₂	1 ³	9 ²	2 ¹	8 ¹	-2
A ₃	7 ⁹	4 ⁶	10 ¹²	5 ³	-5
V _j	3	9	3	10	

当所有非基变量的检验数均非负时，则当前调运方案即为最优方案，如表此时最小总运费：

$$Z = (1 \times 3) + (4 \times 6) + (3 \times 5) + (2 \times 10) + (1 \times 8) + (3 \times 5) = 85 \text{元}$$

表上作业法的计算步骤：



表上作业法计算中的问题:

(1) 若运输问题的某一基可行解有多个非基变量的检验数为负, 在继续迭代时, 取它们中任一变量为换入变量均可使目标函数值得到改善, 但通常取 $\sigma_{ij} < 0$ 中最小者对应的变量为换入变量。

(2) 无穷多最优解

产销平衡的运输问题必定存最优解。如果非基变量的 $\sigma_{ij} = 0$, 则该问题有无穷多最优解。



(2) 退化解:

※ 表格中一般要有 $(m+n-1)$ 个数字格。但有时在分配运量时则需要同时划去一行和一列，这时需要补一个0，以保证有 $(m+n-1)$ 个数字格作为基变量。一般可在划去的行和列的任意空格处加一个0即可。

※ 利用进基变量的闭回路对解进行调整时，标有负号的最小运量（超过2个最小值）作为调整量 θ ，选择任意一个最小运量对应的基变量作为出基变量，并打上“×”以示作为非基变量。

如下例中 σ_{11} 检验数是 0，经过调整，可得到另一个最优解。

销地 产地	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	产量
A ₁	4 (0)	12 (2)	4 12	11 4	16
A ₂	2 8	10 (2)	3 (1)	9 2	10
A ₃	8 (9)	5 14	11 (12)	6 8	22
销量	8	14	12	14	

例：用最小元素法求初始可行解

销地 产地	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	产量
A ₁	3 ×	11 ×	4 1	4 6	7
A ₂	7 ×	7 ×	3 4	8 ×	4
A ₃	1 3	2 6	10 ×	6 0	9
销量	3	6	5	6	20

在 x_{12} 、 x_{22} 、 x_{33} 、 x_{34} 中任选一个变量作为基变量，例如选 x_{34}

变化：

- 1) 有时目标函数求最大。如求利润最大或营业额最大等；
- 2) 当某些运输线路上的能力有限制时，在模型中直接加入约束条件（等式或不等式约束）；
- 3) 产销不平衡时，可加入假想的产地（销大于产时）或销地（产大于销时）。

1. 求极大值问题

目标函数求利润最大或营业额最大等问题。

$$\max Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i & i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0, & i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

求解方法：

将极大化问题转化为极小化问题。设极大化问题的运价表为 C ，用一个较大的数 M ($M \geq \max\{c_{ij}\}$) 去减每一个 c_{ij} 得到矩阵 C' ，其中 $C' = (M - c_{ij}) \geq 0$ ，将 C' 作为极小化问题的运价表，用表上用业法求出最优解。

例3.3 下列矩阵 C 是 A_i ($i=1, 2, 3$) 到 B_j 的吨公里利润,运输部门如何安排运输方案使总利润最大.

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	2	5	8	9
A_2	9	10	7	10
A_3	6	5	4	12
销量	8	14	9	

取 $M = \max\{c_{ij}\} = c_{22} = 10, c'_{ij} = 10 - c_{ij}$

得到新的最小化运输问题，用表上作业法求解即可。

销地 产地	B ₁	B ₂	B ₃	产量
A ₁	2	5	8	9
A ₂	9	10	7	10
A ₃	6	5	4	12
销量	8	14	9	

2. 产销不平衡的运输问题

当总产量与总销量不相等时,称为不平衡运输问题.这类运输问题在实际中常常碰到,它的求解方法是将不平衡问题化为平衡问题再按平衡问题求解。

● 当产大于销时, 即: $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$

数学模型为:

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i & i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0, & i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

由于总产量大于总销量，必有部分产地的产量不能全部运送完，必须就地库存，即每个产地设一个仓库，假设该仓库为一个虚拟销地 B_{n+1} ， b_{n+1} 作为一个虚拟销地 B_{n+1} 的销量(即库存量)。各产地 A_i 到 B_{n+1} 的运价为零，即 $C_{i,n+1}=0$ ，($i=1, \dots, m$)。则平衡问题的数学模型为：

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i & i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & j = 1, 2, \dots, n+1 \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n+1 \end{cases} \end{aligned}$$

具体求解时,只在运价表右端增加一列 B_{n+1} ，运价为零,销量为 b_{n+1} 即可

- 当销大于产时，即： $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$

数学模型为：

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j \quad j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, \end{array} \right. \end{aligned}$$

由于总销量大于总产量,故一定有些需求地不完全满足,这时虚设一个产地 A_{m+1} ，产量为： $\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$

销大于产化为平衡问题的数学模型为：

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i & i = 1, 2, \dots, m+1 \\ \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j & j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m+1; j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \end{aligned}$$

具体计算时，在运价表的下方增加一行 A_{m+1} ，运价为零。产量为 a_{m+1} 即可。

例3.4 求下列表中极小化运输问题的最优解。

	B1	B2	B3	B4	a_i
A1	5	9	2	3	60
A2	--	4	7	8	40
A3	3	6	4	2	30
A4	4	8	10	11	50
b_j	20	60	35	45	180 160

因为：
$$\sum_{i=1}^4 a_i = 180 > \sum_{j=1}^4 b_j = 160$$

所以是一个产大于销的运输问题。表中 A_2 不可达 B_1 ，用一个很大的正数 M 表示运价 C_{21} 。虚设一个销量为 $b_5=180-160=20$ ， $C_{i5}=0$ ， $i=1,2,3,4$ ，表的右边增添一列，得到新的运价表。

	B1	B2	B3	B4	B5	a_i
A1	5	9	2	3	0	60
A2	M	4	7	8	0	40
A3	3	6	4	2	0	30
A4	4	8	10	11	0	50
b_j	20	60	35	45	20	180

下表为计算结果。可看出：产地A4还有20个单位没有运出。

	B1	B2	B3	B4	B5	Ai
A1			35	25		60
A2		40				40
A3		10		20		30
A4	20	10			20	50
Bj	20	60	35	45	20	180

3. 生产与储存问题

例3.5 某厂按合同规定须于当年每个季度末分别提供10、15、25、20台同一规格的柴油机。已知该厂各季度的生产能力及生产每台柴油机的成本如右表。如果生产出来的柴油机当季不交货，每台每积压一个季度需储存、维护等费用0.15万元。试求在完成合同的情况下，使该厂全年生产总费用为最小的决策方案。

季度	生产能力/台	单位成本/万元
I	25	10.8
II	35	11.1
III	30	11
IV	10	11.3

解： 设 x_{ij} 为第 i 季度生产的第 j 季度交货的柴油机数目，那么应满足：

交货：	x_{11}	$= 10$	生产：	$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 25$
	$x_{12} + x_{22}$	$= 15$		$x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 35$
	$x_{13} + x_{23} + x_{33}$	$= 25$		$x_{33} + x_{34} \leq 30$
	$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44}$	$= 20$		$x_{44} \leq 10$

把第 i 季度生产的柴油机数目看作第 i 个生产厂的产量；把第 j 季度交货的柴油机数目看作第 j 个销售点的销量；设 c_{ij} 是第 i 季度生产的第 j 季度交货的每台柴油机的实际成本，应该等于该季度单位成本加上储存、维护等费用。可构造下列产销平衡问题：

i \ j	I	II	III	IV	产量
I	10.8	10.95	11.1	11.25	25
II	M	11.10	11.25	11.40	35
III	M	M	11.00	11.15	30
IV	M	M	M	11.30	10
销量	10	15	25	20	100 70

由于产大于销，加上一个虚拟的销地D，化为平衡问题，即可应用表上作业法求解。

该问题的数学模型：

$$\begin{aligned} \text{Min } f = & 10.8 x_{11} + 10.95 x_{12} + 11.1 x_{13} + 11.25 x_{14} + 11.1 x_{22} + 11.25 x_{23} \\ & + 11.4 x_{24} + 11.0 x_{33} + 11.15 x_{34} + 11.3 x_{44} \end{aligned}$$

$\begin{smallmatrix} i \backslash j \\ \end{smallmatrix}$	I	II	III	IV	D	产量
I	10.8	10.95	11.1	11.25	0	25
II	M	11.10	11.25	11.40	0	35
III	M	M	11.00	11.15	0	30
IV	M	M	M	11.30	0	10
销量	10	15	25	20	30	$\begin{smallmatrix} 100 \\ 100 \end{smallmatrix}$

最优生产决策如下表，最小费用 $z = 773$ 万元。

i \ j	I	II	III	IV	D	产量
I	10	15	0			25
II			0	5	30	35
III			25	5		30
IV				10		10
销量	10	15	25	20	30	100 100